

NMFM205 - Matematika ve financích a pojišřovnictví - ZS 2025/26

přednášející Martin Šmíd, UTIA AV ČR

4. prosince 2025

Úvod

O čem se budeme bavit?

O **finančních tocích (cash flows)**: časově uspořádaných řadách peněžních příjmů a výdajů.

Učebnicové příklady:

Úvěr Příjem v čase 0, řada výdajů později (kupujeme si „peníze hned“, platíme úrok).

Spoření Pravidelné výdaje do času T , nominálně vyšší příjem v čase T .

Otázky, co tu budeme řešit.

- ? Který je lepší než jiný?
- ? Jak je kombinovat?
- ? Kolik skutečně zaplatíme (RPSN atd.)?
- ? Co když jsou dopředu neznámé?

Spořit můžeme na termínovaném vkladu, ale...

...můžeme i investovat. Třeba do **cenných papírů**, jako jsou:

Dluhopisy Protistrana po několik období platí pevné částky (kupóny), na konci splatí investovanou částku.

Akcie Protistrana platí „donekonečna“ podíl ze zisku (dividendy).

Problém: protistrana nemusí být schopna dostát závazkům (například může zkrachovat), v případě akcií je i **nejistota**, jaké budou dividendy.

Kromě toho při obchodování platíme **transakční náklady** a některé cenné papíry nejsou **likvidní** (nenajdeme protistranu).

Cenné papíry nemusíme držet, ale. . .

. . . můžeme s nimi obchodovat. K tomu slouží **finanční trhy**, nicméně ceny na nich jsou nejisté.

Ke snížení této nejistoty slouží **finanční deriváty**:

Forwardy Garantují budoucí cenu podkladového aktiva.

Futures Standardizovaná verze forwardů.

Swapy Výměna úrokových příjmů či plateb (např. proměnlivé za fixní).

Opce Právo (nikoli povinnost) koupit/prodat aktivum k danému datu za stanovenou cenu.

Podkladovým aktivem nemusí být jen cenný papír, ale i měna, komodita, povolenka nebo třeba počasí.

Všimněte si podobnosti s pojištěním.

Aby to nebylo tak jednoduché. . .

. . . máme ve světě různé měny. Jejich směna přináší další nejistotu (pro exportéry, spotřebitele i turisty).

- Kurzy většiny měn závisejí na nabídce a poptávce.
- Kurzové riziko lze eliminovat pomocí derivátů.
- Směna má vždy své transakční náklady.
- O utváření kurzů rozhoduje **parita kupní síly** a **konkurence úrokových sazeb**.

Kryptoměny

- nemají centrální instituci,
- jsou do jisté míry transparentní (i když existují anonymizační nástroje),
- jejich kurzy a likvidita závisejí na ochotě je používat.

Zajímavost: podobné principy platí například pro herní měny.

Většina finančních toků čelí nejistotě. . .

. . . která vytváří **riziko**.

Riziko lze kontrolovat:

- pomocí derivátů,
- pomocí diverzifikace.

Pro kvantifikaci rizika se obvykle používá (frekventistická) pravděpodobnost.

Jako **míra rizika** se historicky používal rozptyl, ten však (pro svou jednostrannost) částečně ustoupil VaR – **hodnotě v riziku**. Akademická literatura preferuje **koherentní míry rizika**.

. . . je obchodování s (nejen) finančními aktivy za účelem zisku na pohybu jejich cen.

- většinou jde o vysoce rizikovou aktivitu,
- riziko klesá s informační asymetrií (pokud spekulant ví více než trh),
- ke spekulaci se často používají deriváty (oslabuje se tím jejich původní účel),
- (nejen) kvůli spekulacím vznikají **bubliny**.

. . . slouží k zajištění, zmírnění či kompenzaci (většinou) nefinančních rizik.

Komerční životní, majetkové, úrazové, cestovní, odpovědnostní.

Sociální penzijní, invalidní, nemocenské.

Zdravotní veřejné, komerční.

Orientační rozvrh

Datum	Téma	Úkol	Body
2.10.	Úvod, základní pojmy, úročení	DP 1	max 7
9.10.	Cash flow		
16.10.	Riziko		
23.10.	Obligace		
30.10.	—	DP 2	max 7
6.11.	Akcie		
13.11.	Měny	DP 3	max 7
20.11.	Deriváty		
27.11.	Výběr portfolia	DP 4	max 7
4.12.	Pojišťovnictví	DP 5	max 7
11.12.	Konzultace domácích úkolů		
18.12.	Písemná zkouška (5 příkladů ručně)		max 65
8.1.	ústní zkouška (3 příklady + zkouška)		max ??

Poznámka: Ke zkoušce je požadována (a stačí) znalost materiálu z této prezentace. Části označené * (většinou používající neprabraný matematický aparát) nebudou vyžadovány.

Hodnocení: $(85, \infty] \rightarrow 1$, $(70, 85] \rightarrow 2$, $(55, 70] \rightarrow 3$

Cipra, T.: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*. Ekopress, Praha 2015 (2. vydání). Také anglicky: *Practical Guide to Financial and Insurance Mathematics*. Ekopress, Praha 2020.

[MCP] Cipra, T.: *Matematika cenných papírů*. Professional Publishing, Praha 2013.

[FPV] Cipra, T.: *Finanční a pojistné vzorce*. Grada Publishing, Praha 2006. Také anglicky: *Financial and Insurance Formulas*. Springer, Heidelberg 2010.

Cipra, T.: *Finanční ekonometrie*. Ekopress, Praha 2013 (2. vydání).

Cipra, T.: *Riziko ve financích a pojišťovnictví: Basel III a Solvency II*. Ekopress, Praha 2015.

Cipra, T.: *Pojistná matematika: teorie a praxe*. Ekopress, Praha 2006.

Cipra, T.: *Zajištění a přenos rizik v pojišťovnictví*. Grada, Praha 2004.

Cipra, T.: *Penze: kvantitativní přístup*. Ekopress, Praha 2012.

Cipra, T.: *Penzijní pojištění a jeho výpočetní aspekty*. HZ, Praha 1996.

- Vývoj je bouřlivý a zatím nevíme, kde (a zda) se zastaví.
- Podle mého názoru by ChatGPT 5 tuto přednášku dokázal na základě poznámek prof. Cipry, dostupných skript a obecné znalosti „se ctí“ odučit, vyrobit příklady, opravit je a navrhnout i opravit písemku. (Jedná se o široce probíraný mainstreamový materiál.)
- Je pravděpodobné, že by udělal méně chyb než já.
- Domácí úkoly budou i pro volnou verzi AI snadná záležitost.

- (takže můžeme jít domů . . .)

- Nicméně na písemce AI nebude.
- A v praxi budete mít zodpovědnost vy.

Úročení a diskontování

Úročení a diskontování

- Z pohledu věřitele (investora): odměna za zapůjčení kapitálu
- Z pohledu dlužníka: cena za získání úvěru
- Úroková míra vyjadřuje relativní navýšení (v %) za období zapůjčení
- Sazby se odvíjejí od:
 - rizika dlužníka
 - inflace
 - likvidity a dalších faktorů

Úrokové sazby

- Repo sazba (ČR: 2T repo) – stanovuje ČNB
- Mezibankovní sazby: LIBOR, EURIBOR, PRIBOR, SOFR
- Hypoteční a spotřebitelské sazby
- Faktory ovlivňující sazbu:
 - finanční riziko
 - daně (např. daň z příjmu, DPH)

$$u = P \cdot i \cdot t = P \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{k}{360}$$

- P – jistina (počáteční kapitál)
- i – roční úroková míra (p v procentech)
- t – doba půjčky v letech (k = doba půjčky ve dnech)
- u – celkový úrok

Příklad 2.1. Preferenční akcie s nominální hodnotou 100 USD byla nakoupena za 52 USD. Dividendový výnos: 3,75 USD.

Řešení.

$$u = 100 \cdot 0,0375 \cdot 1 = 3,75 \text{ USD}, \quad \text{Relativní výnos} = \frac{3,75}{52} \approx 7,2\% \text{ p.a.}$$

Úrokové standardy

- **30E/360**: měsíc má 30 dní, rok 360 dní (cenné papíry)
- **ACT/360**: skutečný počet dní / 360 (krátkodobé obchody)
- **ACT/365**: skutečný počet dní / 365

Úrokové číslo a dělitel

- Úrokové číslo: $UC = \frac{P \cdot k}{100}$
- Úrokový dělitel: $UD = \frac{360}{p}$ (při sazbě p)
- Úrok: $u = \frac{UC}{UD}$

Příklad: Úroková čísla

Příklad 2.2. Na počátku roku je stav účtu 80 000 Kč, od 5.6. 30 000 Kč, od 15.9. 100 000 Kč, a tak zůstane do konce roku. Účet je úročen 10% p.a., standard 30E/360. Jaký úrok bude připsán na konci roku?

	Datum	Stav	Počet dní	UC
Řešení.	1.1.	80 000	155 (= 5 × 30 + 5*)	124 000
	5.6.	30 000	100 (= 2 × 30 + 25 + 15)	30 000
	15.9.	100 000	105	105 000
	31.12.	100 000	—	—

* Započítá se i první den, zůstaek je z minulého roku

$$UC = 259\,000, \quad UD = \frac{360}{10} = 36, \quad u = \frac{259\,000}{36} \approx 7\,194,44 \text{ Kč.}$$

Běžný účet

- Základní účet pro vedení finančních prostředků.
- Slouží k příjmům a výdajům klienta.
- Umožňuje provádění bezhotovostního platebního styku.
- Často je kombinován s kontokorentem.

Kontokorent

- Možnost jít „do mínusu“ na běžném účtu.
- Banka stanovuje úvěrový rámec.
- Má charakter krátkodobého úvěru.
- Úroky se platí pouze z čerpané částky.
- Mohou být účtovány další poplatky (např. za vedení účtu, za překročení rámce apod.).

Příklad: Kontokorent

Příklad 2.3. Klient má sjednaný rámec 50 000 Kč. Debetní úrok: 20 % p.a., kreditní úrok: 15 % p.a. Poplatek za kontokorent: 0,5 % p.a. Úročení běžného účtu je 2 % p.a. (ACT/360).

Datum	Příjem	Výdej
30.9.	–	30 000
10.10.	5 000	–
30.10.	–	10 000
6.11.	–	20 000
20.11.	40 000	–
8.12.	20 000	–
31.12.	–	–

Vypočítejte konečný zůstatek pomocí *UC* a *UD* pro jednotlivé úseky.

Řešení: Rozklad úrokových čísel (UC) po intervalech

Řešení.

Dnů	Kreditní zůstatek		Debetní zůstatek		Překročení rámce		Nečerpaný rámec	
	Zůstatek	UC	Zůstatek	UC	Částka	UC	Částka	UC
10	0	0	30 000	3 000	0	0	20 000	2 000
20	0	0	40 000	8 000	0	0	10 000	2 000
7	0	0	35 000	2 450	0	0	15 000	1 050
14	0	0	55 000	7 700	5 000	700	0	0
18	0	0	15 000	2 700	0	0	35 000	6 300
23	5 000	$1\,150 (= \frac{5000 \cdot 23}{100})$	0	0	0	0	0	0
	Sumy	1 150		23 850		700		11 350

Pozn.: $UC = (\text{základ} \times \text{počet dnů})/360$.

Kreditní úroky: $1150/360 \cdot 2 = +6,39$ Kč

Debetní úroky: $-23850/360 \cdot 15 = -993,45$ Kč

Poplatek za překročení rámce: $-700/360 \cdot 5 = -9,72$ Kč

Podrozkahová provize: $-11350/360 \cdot 0,5 = -15,76$ Kč

Celkový výsledný úrok: $-1012,84$ Kč

Celkový zůstatek:

$$5000 - 1012,84 = 3987,16 \text{ Kč}$$

Jednoduchý diskont

- Úrok (diskont) je odečten ve prospěch věřitele předem, tj. při poskytnutí půjčky.
- Dlužník obdrží méně, než je nominální (splatná) hodnota závazku.
- Diskont vyjadřuje rozdíl mezi splatnou částkou a skutečně vyplacenou půjčkou.

Vzorce

$$D = S \cdot d \cdot t = S \cdot d \cdot \frac{k}{360}$$

$$P = S - D = S \cdot \left(1 - d \cdot \frac{k}{360}\right)$$

- S – splatná částka (nominál)
- d – diskontní míra p.a.
- t – doba v letech, resp. k dní (při 360denní konvenci)
- P – současná (vyplacená) částka

Obecný vzorec

$$S = P \cdot (1 + i)^n$$

- P – počáteční hodnota (jistina)
- i – úroková míra za jedno období
- n – počet úrokovacích období

Obecný vzorec

$$S = P \cdot (1 + i)^n$$

- P – počáteční hodnota (jistina)
- i – úroková míra za jedno období
- n – počet úrokovacích období

Efektivní úroková míra:

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

Diskontní vzorec

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S \cdot v^n$$

kde $v = \frac{1}{1+i}$ (diskontní faktor).

- Použití: určování současné hodnoty budoucí platby.
- Čím vyšší úroková míra i , tím menší současná hodnota P .
- Diskontní faktor v udává, kolik dnes stojí 1 Kč splatná za 1 období.

Příklad: Složené úročení

Příklad 2.4. Jak se zhodnotí 1000 Kč při sazbách 4 % a 10 % p.a. pro $n = 1, 5, 10, 20, 30$ let?

Řešení.

$$S = P(1 + i)^n$$

Rok	$i = 4\%$	$i = 10\%$
1	1 040,00	1 100,00
5	1 216,65	1 610,51
10	1 480,24	2 593,74
20	2 191,12	6 727,50
30	3 243,40	17 449,40

Příklad 2.5. Jakou současnou hodnotu má 1000 Kč splatných za 10 let při $i = 12\%$ p.a.?

Řešení.

$$P = S(1 + i)^{-n} = 1000 \cdot (1,12)^{-10} \approx 321,97 \text{ Kč.}$$

Interpretace: Dnešních 322 Kč odpovídá 1000 Kč za 10 let při 12 % p.a.

Příklad 2.6. Jaká je efektivní míra, když 50 000 Kč vyroste za 10 let na 100 000 Kč?

Řešení.

$$i_{\text{ef}} = \left(\frac{100000}{50000} \right)^{1/10} - 1 \approx 7,18\% \text{ p.a.}$$

Příklad 2.7. Za jak dlouho se kladná částka zdvojnásobí při 10% p.a.?

Řešení.

$$2P = P(1 + 0.1)^n \rightarrow n = \frac{\ln(2)}{\ln(1,10)} \approx 7,27 \text{ roku}$$

Področní úročení

- Úroky se připisují vícekrát do roka:
 - $m = 1$ – ročně (p.a.)
 - $m = 2$ – pololetně
 - $m = 4$ – čtvrtletně
 - $m = 12$ – měsíčně
 - $m = 52$ – týdně
 - $m = 365$ – denně

Vzorec

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m \cdot t}$$

- j – nominální úroková míra (p.a.)
- m – počet připisování úroků za rok (frekvence)
- t – doba v letech

Efektivní úroková míra při področním úročení

- Roční úroková míra odpovídající nominální míře j s frekvencí m .
- Zajišťuje, že roční složený úrok je ekvivalentní nominální sazbě j při m připsováních za rok.

Vzorec

$$1 + i_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m, \quad i_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

Efektivní vs. nominální míra

- Nominální míra j je udávána p.a., ale úroky se připisují m -krát do roka.
- Efektivní míra i_{ef} ukazuje skutečný roční výnos.
- Platí: $i_{ef} > j$, pokud $m > 1$.

Příklad tabulky (pro $j = 5\%$):

Frekvence m	i_{ef}
1 (roční)	5,00 %
2 (pololetní)	5,06 %
4 (čtvrtletní)	5,09 %
12 (měsíční)	5,12 %
365 (denní)	5,127 %

Příklad 2.8. Vklad 750 000 EUR na 2 roky, nominální sazba 12% p.a. Spočtete hodnotu při měsíčním ($m = 12$) a čtvrtletním ($m = 4$) připisování.

Řešení.

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{mt}$$

Měsíčně: $S \approx 951\,180$ EUR

Čtvrtletně: $S \approx 950\,078$ EUR

Příklad 2.9. Najděte i_{ef} pro (a) $m = 12, j = 2\%$; (b) $m = 4, j = 4\%$.

Řešení.

$$i_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$$

$$(a) i_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{0,02}{12}\right)^{12} - 1 \approx 2,02\%$$

$$(b) i_{\text{ef}} = \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^4 - 1 \approx 4,06\%$$

Spojité úročení

- Limitní případ področního úročení při $m \rightarrow \infty$
- Vzorec:

$$S = P e^{i \cdot t}$$

- Platí obecně:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m = e^i$$

Příklad 2.10. $P = 400\,000$ Kč, $i = 7,5\%$ p.a., $t = 5$ let. Spočtěte S při spojitém úročení.

Řešení.

$$S = P e^{it} = 400000 e^{0,375} \approx 591\,996,54 \text{ Kč.}$$

- Označuje se δ – okamžitá (nepřetržitá) míra úročení.
- Obecná definice:

$$S = P e^{\int_0^t \delta(\tau) d\tau}$$

- Pokud je δ konstantní:

$$S = P e^{\delta t}$$

- **Inflace:** růst cenové hladiny \Rightarrow pokles kupní síly peněz.
- **Deflace:** opak inflace.
- **Stagflace:** kombinace inflace a stagnace ekonomiky.
- **Míra inflace** i_{inf} :

$$i_{inf} = \frac{CPI_t - CPI_{t-1}}{CPI_{t-1}},$$

kde CPI = index spotřebitelských cen.

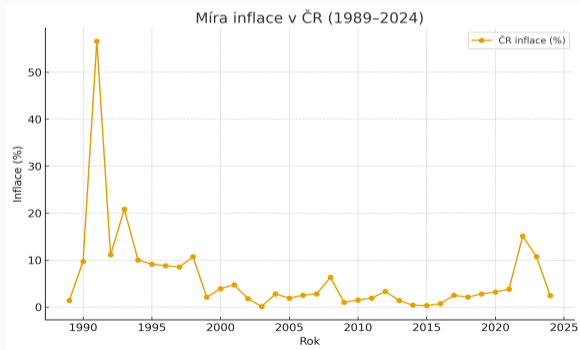
- Různé způsoby výpočtu indexu spotřebitelských cen (CPI):
 - průměrná roční změna CPI,
 - CPI vůči odpovídajícímu měsíci předchozího roku,
 - meziroční změna CPI,
 - bazické období (např. rok 2020 = 100).
- HICP – *Harmonised Index of Consumer Prices*, srovnatelné indexy v EU.

Vývoj inflace – tabulka a graf

Rok	Evropa	EU	ČR
1996	2,2	2,0	8,8
2005	2,2	2,2	1,9
2010	2,1	2,1	1,5
2015	0,0	0,3	0,3
2020	0,3	0,7	3,2
2021	2,6	2,9	3,3
2022	8,4	9,2	15,1
2023	5,4	6,3	12,0
2024	2,4	2,6	2,7

Více: https://csu.gov.cz/mira_inflace, odkaz na přesná data na <https://vyuka.martinsmid.cz>

Míra inflace v České republice (1989–2024)



Přesný vztah mezi nominální a reálnou úrokovou mírou

$$1 + i_{\text{nom}} = (1 + i_{\text{real}})(1 + i_{\text{inf}}) \rightarrow i_{\text{real}} = \frac{1 + i_{\text{nom}}}{1 + i_{\text{inf}}} - 1 \rightarrow i_{\text{real}} = \frac{i_{\text{nom}} - i_{\text{inf}}}{1 + i_{\text{inf}}}$$

Přesný vztah mezi nominální a reálnou úrokovou mírou

$$1 + i_{\text{nom}} = (1 + i_{\text{real}})(1 + i_{\text{inf}}) \rightarrow i_{\text{real}} = \frac{1 + i_{\text{nom}}}{1 + i_{\text{inf}}} - 1 \rightarrow i_{\text{real}} = \frac{i_{\text{nom}} - i_{\text{inf}}}{1 + i_{\text{inf}}}$$

Aproximace (Fisherův vztah)

$$i_{\text{real}} \approx i_{\text{nom}} - i_{\text{inf}}$$

- Přibližně platí při nízké inflaci.
- Při vyšší inflaci je nutné používat přesný vztah.

Příklad: Čistá reálná míra

Hrubá nominální míra: 12,5 %

Daňová sazba: 15 %

Míra inflace: 5 %

1. Čistá nominální míra:

$$i_{\text{nom, čistá}} = 0,125 \cdot (1 - 0,15) = 0,10625 \approx 10,63\%.$$

2. Čistá reálná míra:

$$i_{\text{real}} = \frac{0,10625 - 0,05}{1 + 0,05} \approx 0,05357 \approx 5,35\%.$$

Závěr: Čistý reálný výnos klesl z 12,5 % na cca 5,35 %.

Příklad 2.11. Hrubá nominální míra: 12,5%, daňová sazba: 15%, inflace: 5%.

Řešení.

$$i_{\text{nom, čistá}} = 0,125(1 - 0,15) = 0,10625 = 10,63\%$$

$$i_{\text{real}} = \frac{0,10625 - 0,05}{1 + 0,05} \approx 5,35\%$$

Závěr: čistý reálný výnos klesl z 12,5% na cca 5,35%.

Příklad 2.12. Hrubá nominální míra: 12,5%, daňová sazba: 15%, inflace: 5%.

Řešení.

$$i_{\text{nom, čistá}} = 0,125(1 - 0,15) = 0,10625 = 10,63\%$$

$$i_{\text{real}} = \frac{0,10625 - 0,05}{1 + 0,05} \approx 5,35\%$$

Závěr: čistý reálný výnos klesl z 12,5% na cca 5,35%.

Poznámka. Výpočet pomocí aproximace:

$$i_{\text{real}} \approx i_{\text{nom, čistá}} - i_{\text{inf}} = 10,63\% - 5\% = 5,63\%.$$

1. Na počátku roku byl na kontokorentu dluh d . Na konci každého měsíce jsme splatili s . Úroková míra je p procent. Kolik bude úrok na konci roku při konvenci $30E/360$? (2b).
Poznámka: lze řešit chytřeji než vypsáním do řádků.
2. Vložili jste P na stavební spoření s úrokovou mírou p procent. Na konci prvního roku vám byla připsána podpora 5 procent z vložené částky, maximálně však 1000. Peníze můžete vybrat až na konci šestého roku. Jaká je efektivní úroková míra (pod pojmem efektivní úroková míra zde rozumíme úrokovou míru, při které byste při ročním složeném úročení dosáhli stejné výplaty na konci šestiletého období)? (2b)

3. Násleující tabulka obsahuje průměrné sazby hypoték a inflaci v procentech za jednotlivé roky.

Rok	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Sazby	4.8	4.7	4.6	4.5	4.8	5.0	5.2	5.1	4.7	4.3	4.0
Inflace	0.1	2.8	1.9	2.5	2.8	6.3	1.0	1.5	1.9	3.3	1.4

Rok	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Sazby	3.6	3.2	3.1	3.0	2.8	3.1	3.0	2.5	3.8	5.0	5.1
Inflace	0.4	0.3	0.7	2.5	2.1	2.8	3.2	3.8	15.1	10.7	2.4

Přepokládejme, že si si na začátku roku t vezmeme půjčku na y let s pevnou (!) roční sazbou platnou v daném roce (první řádek tabulky). Určete *efektivní reálnou* úrokovou míru za celou dobu hypotéky (3b, tabulka v CSV v moodle).

Cash Flow

Systémy cash flows a investiční pravidla

Cash flow (CF) = platby vztahující se ke svým časovým bodům v rámci finančních, podnikových a investičních projektů.

- **Příjem (inflow)** – částka odtékající z jiné strany k nám
- **Výdaj (outflow)** – částka od nás odtékající jinam

Oceňování systému CF:

- všechny CF se vztahují k **referenčnímu datu**
- diskontujeme či úročíme podle časové hodnoty peněz

Valuation interest rate (cena kapitálu):

- průměrný výnos v daném investičním sektoru (např. developerském)
- odpovídá nákladům kapitálu

- Porovnává alternativní směry cash flow s ohledem na zvolené referenční datum.
- Řešením je hledaná hodnota (např. doplatek).

Příklad 3.1. Klient koupil byt v hodnotě 6 000 000 Kč podle následující platební struktury:

- 3 000 000 Kč ihned
- 2 000 000 Kč za rok
- 1 000 000 Kč za 2 roky
- doplatek x za 3 roky

Jaký má developer stanovit doplatek, když úroková míra (cena kapitálu), je 11 % p.a. ?

Řešení. 1. Referenční datum: datum koupě nemovitosti

$$6\,000\,000 = \frac{3\,000\,000}{1,11^0} + \frac{2\,000\,000}{1,11} + \frac{1\,000\,000}{1,11^2} + \frac{x}{1,11^3}$$

2. Referenční datum: datum doplacení (za 3 roky)

$$6\,000\,000(1,11)^3 = 3\,000\,000(1,11)^3 + 2\,000\,000(1,11)^2 + 1\,000\,000(1,11) + x$$

Výsledek: $x = 528\,693$ Kč

Počáteční a koncová hodnota systému CF

Počáteční hodnota PV (present value, současná hodnota) = cena daného systému CF při dané ceně kapitálu v počátečním čase t_0 .

$$PV = \sum_{n=0}^K \frac{C_{t_n}}{(1+i)^{t_n}}$$

- C_{t_n} ... CF v čase t_n , příjem: $C_{t_n} > 0$, výdaj: $C_{t_n} < 0$

Poznámka: U investice do cenného papíru (CP):

$$C_0 < 0, \quad C_{t_n} > 0 \text{ (např. kupón, dividenda, splátka nominálu)}$$

Investiční pravidlo:

$$PV > 0 \Rightarrow \text{projekt je výhodný.}$$

Příklad 3.2. Uvažujme investici s následujícími toky CF (v EUR):

- výdaj 5 000 000 EUR při zahájení projektu,
- investice 10 000 000 EUR na konci 1. roku,
- investice 10 000 000 EUR na konci 2. roku,
- výnos 40 000 000 EUR na konci 2. roku.

Cena kapitálu (diskontní sazba) $i = 7\%$ p.a. Bude projekt ziskový?

Příklad 3.3. Uvažujme investici s následujícími toky CF (v EUR):

- výdaj 5 000 000 EUR při zahájení projektu,
- investice 10 000 000 EUR na konci 1. roku,
- investice 10 000 000 EUR na konci 2. roku,
- výnos 40 000 000 EUR na konci 2. roku.

Cena kapitálu (diskontní sazba) $i = 7\%$ p.a. Bude projekt ziskový?

Řešení.

$$PV = -5,000,000 - \frac{10,000,000}{1,07} + \frac{40,000,000 - 10,000,000}{(1,07)^2} = 1,857,367 \text{ EUR}$$

Závěr: $PV > 0 \rightarrow$ projekt je výhodný (přináší kladnou současnou hodnotu).

Koncová hodnota FV (future value, budoucí hodnota) = cena systému CF při volbě referenčního data na posledním CF systému.

$$FV = \sum_{n=0}^K C_{t_n} (1 + i)^{T - t_n}$$

- vyjadřuje, kolik bude systém CF „stát“ v budoucím čase T
- lze chápat jako převrácený postup k diskontování

Definice: Vnitřní míra výnosnosti i^* je taková úroková míra, pro kterou

$$\sum_{n=0}^K \frac{C_{t_n}}{(1 + i^*)^{t_n}} = 0.$$

Rozhodovací pravidlo:

- pokud $i^* > i$, kde i je cena kapitálu (požadovaná výnosnost), \Rightarrow **investovat**;
- pokud $i^* < i$, \Rightarrow **neinvestovat**.

Příklad – Kupónový dluhopis

Příklad 3.4. Kupónový dluhopis s nominální hodnotou 10 000 Kč, kupónová sazba 6 % p.a., doba splatnosti 3 roky. Tržní cena dluhopisu je 9 000 Kč. Požadovaná výnosnost investora $i = 9\%$ p.a.

Příklad – Kupónový dluhopis

Příklad 3.5. Kupónový dluhopis s nominální hodnotou 10 000 Kč, kupónová sazba 6 % p.a., doba splatnosti 3 roky. Tržní cena dluhopisu je 9 000 Kč. Požadovaná výnosnost investora $i = 9\%$ p.a.

Řešení.

$$C_0 = -9,000, \quad C_1 = 600, \quad C_2 = 600, \quad C_3 = 10,600.$$

Rovnice:

$$-9,000 + \frac{600}{(1+i^*)} + \frac{600}{(1+i^*)^2} + \frac{10,600}{(1+i^*)^3} = 0$$

Řešení (např. Excel: =IRR({-9000;600;600;10600})):

$$i^* \approx 0,1002 = 10,02\%.$$

RPSN – roční procentní sazba nákladů

= vnitřní míra výnosnosti úvěru.

Příklad 3.6. Uvažujme stavební spoření s cílovou částkou C spoření a spojenou s úvěrem.

- Na začátku čerpáme úvěr
- Nejprve je potřeba naspořit 40 % C , do té doby platíme z úvěru jen úroky.
- V okamžiku, kdy zůstatek spoření překročí 40% C , použije se na částečné splacení úvěru a ten se pak dál splácí (viz anuity v paralelním předmětu)

Řešení. Viz doprovodný google sheet.

Anketa: Firma, kde jsem na malé brigádě, mi nabídne dvě možnosti, jak mi zaplatí

1A 1000 teď

1B 500 teď a 550 za 3 měs.

(poznamenejte si odpověď)

Anketa: Firma, kde jsem na malé brigádě, mi nabídne dvě možnosti, jak mi zaplatí

1A	1B
2AA 1000 ted'	2BA 1000 ted'
2AB 500 ted' a 570 za 3 měs.	2BB 500 ted' a 525 za 3 měs.

Anketa: Firma, kde jsem na malé brigádě, mi nabídne dvě možnosti, jak mi zaplatí

2AA	2AB
3AAA 1000 ted'	3ABA 1000 ted'
3AAB 500 ted' a 600 za 3 měs.	3ABB 500 ted' a 565 za 3 měs.
2BA	2BB
3BAA 1000 ted'	3BBA 1000 ted'
3BAB 500 ted' a 535 za 3 měs.	3BBB 500 ted' a 510 za 3 měs.

Anketa: Firma, kde jsem na malé brigádě, mi nabídne dvě možnosti, jak mi zaplatí

Výpočet δ

$$1B \Rightarrow PV = 500 + \delta^{1/4}550$$

$$1000 = 500 + \delta^{1/4}550 \Rightarrow \delta = (550/500)^4 = 1.46$$

- 1A** Preferuji 1000 teď \Rightarrow moje $PV(1B) \leq 1000 \Rightarrow \delta \geq 1,46$ (\Rightarrow musíte za ty 3 měsíce dát více!)
- 1B** Preferuji 500 teď a 550 za 3 měs. \Rightarrow moje $PV(1B) \geq 1000 \Rightarrow \delta \leq 1,46$ (\Rightarrow jsem spokojen s odloženou platbou, zkoumejme ale jestli by mi nestačilo méně...)

Subjektivní diskont δ^*

Anketa: Firma, kde jsem na malé brigádě, mi nabídne dvě možnosti, jak mi zaplatí

Vyhodnocení

Odpovědi	δ	ríjen 25
BBB	[1, 1.08]	3
BBA	[1.08, 1.22]	4
BAB	[1.22, 1.31]	3
BAA	[1.31, 1.46]	2
ABB	[1.46, 1.57]	0
ABA	[1.57, 1.69]	2
AAB	[1.69, 2.07]	6
AAA	[2.07, ∞]	2

Interpretace Čím větší δ , tím větší "netrpělivost" (museli byste dát opravdu hodně, abych počkal...)

Anketa: Kupuji si stan, a mám dvě možnosti jak zaplatit

1A 1000 teď

1B 500 teď a 550 za 3 měs.

Anketa: Kupuji si stan, a mám dvě možnosti jak zaplatit

1A	1B
2AA 1000 ted'	2BA 1000 ted'
2AB 500 ted' a 525 za 3 měs.	2BB 500 ted' a 570 za 3 měs.

Anketa: Kupuji si stan, a mám dvě možnosti jak zaplatit

2AA	2AB
3AAA 1000 ted'	3ABA 1000 ted'
3AAB 500 ted' a 510 za 3 měs.	3ABB 500 ted' a 535 za 3 měs.
2BA	2BB
3BAA 1000 ted'	3BBA 1000 ted'
3BAB 500 ted' a 560 za 3 měs.	3BBB 500 ted' a 600 za 3 měs.

Anketa: Kupuji si stan, a mám dvě možnosti jak zaplatit

Výpočet δ

$$1B \Rightarrow PV = -500 - \delta^{1/4}550$$

$$-1000 = -500 - \delta^{1/4}550 \Rightarrow \delta = (550/500)^4 = 1.46$$

1A Preferuji 1000 teď $\Rightarrow PV(1B) \leq -1000$ (\Leftrightarrow 550 později pro mě znamená víc než 500 dnes) $\Rightarrow \delta \leq 1,46$ (při této hodnotě by znamenalo stejně)

1B Preferuji 500 teď a 550 za 3 měs. $\Rightarrow PV \geq -1000 \Rightarrow \delta \geq 1,46$

Anketa: Kupuji si stan, a mám dvě možnosti jak zaplatit

	Odpovědi	δ	říjen 25
Vyhodnocení (dluh)	AAA	[1, 1.08]	14
	AAB	[1.08, 1.22]	2
	ABA	[1.22, 1.31]	0
	ABB	[1.31, 1.46]	0
	BAA	[1.46, 1.57]	1
	BAB	[1.57, 1.69]	0
	BBA	[1.69, 2.07]	0
	BBB	[2.07, ∞]	0

Interpretace Čím větší δ , tím větší ochota se zadlužovat (klidně velký úrok, hlavně abych nemusel platit teď...)

Riziko

Náhodná veličina

Pro jednoduchost budeme po **náhodnou veličinou** je rozumět (uspořádaný) konečný soubor reálných čísel reálných čísel, ke každému z nich je přiřazena pravděpodobnost. Suma pravděpodobností je vždy rovna jedné.

Náhodnou veličinu budeme zapisovat jako $X = (x_i, p_i)_{i=1}^n$.

Příklady:

Hod mincí $M = ((0, 0.5), (1, 0.5))$ (čísla stranám přiřad' libovolně)

Hod kostkou $K = (i, 1/6)_{i=1}^6$

Výsledek zápasu $Z = ((-1, p_1), (0, p_2), (1, p_3))$

Dividenda akcie $D = (d_i, p_i)_{i=1}^n$, kde d_i jsou všechny možná částky v korunách a haléřích až po nějakou horní hranici

Poznámka. V "opravdové"teorii pravděpodobnosti máme i spojité náhodné veličiny.

Co je náhoda?*

- Pravděpodobnost není přírodní zákon (save Kodaňská interpretace kvantové fyziky)
- Filozoficky: náhodný je děj bez příčiny
- Prakticky: mechanismus vzniku jevu většinou známe, ale nejsme schopni výsledek kvantifikovat
 - Hod kostkou či mincí je následkem pohybu naší ruky a interakce s prostředím
 - Cena akcie je výsledkem interakce obchodníků
- Generátory náhodných čísel jsou často deterministické systémy navržené tak, aby prošly testy náhodnosti
- V různých hrách "náhodu" záměrně vytváříme

Střední hodnota, rozptyl a směrodatná odchylka

Mějme náhodnou veličinu $X = (x_i, p_i)_{i=1}^n$ s $p_i \geq 0$ a $\sum_i p_i = 1$.

Střední hodnota \mathbb{E} , **rozptyl** $\text{Var}(X)$, **směrodatná odchylka** $\sigma(X)$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}[X])^2 p_i, \quad \sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Ekvivalentně:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2, \quad \text{kde } \mathbb{E}[X^2] = \sum_i x_i^2 p_i.$$

Vlastnosti:

- $\text{Var}(X) \geq 0$.
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.
- $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.
- $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$.

Příklady: hod mincí M a hod kostkou K

Hod mincí: $M = ((0, 0.5), (1, 0.5))$

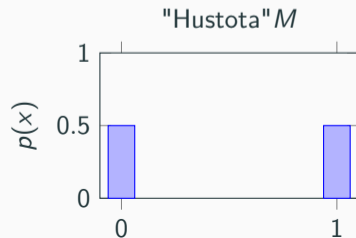
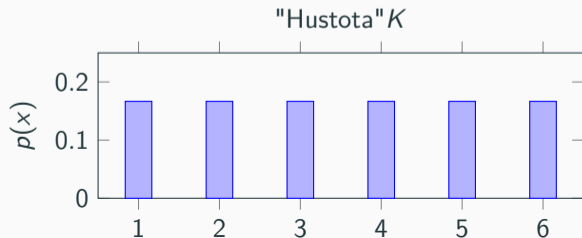
$$\mathbb{E}[M] = 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.5 = 0.5, \quad \mathbb{E}[M^2] = 0^2 \cdot 0.5 + 1^2 \cdot 0.5 = 0.5,$$

$$\text{Var}(M) = 0.5 - (0.5)^2 = 0.25.$$

Hod kostkou: $K = (i, 1/6)_{i=1}^6$

$$\mathbb{E}[K] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5, \quad \mathbb{E}[K^2] = \frac{1^2+2^2+\dots+6^2}{6} = \frac{91}{6},$$

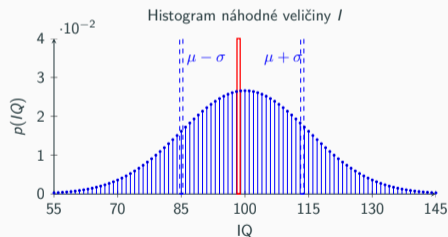
$$\text{Var}(K) = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{35}{12} \approx 2.92.$$



Příklad: IQ (zaokrouhlené na jednotky)

IQ je v populaci rozloženo přibližně podle Gaussovy křivky se středem 100 a směrodatnou dočylkou 15. N.v. I – IQ náhodně vybrané osoby (zaokrouhlené na celé body) – bude tedy mít

$$\mathbb{E}[I] = 100, \quad \text{Var}(I) \doteq 15^2 = 225.$$



Poznámka: Spojité verzi tohoto rozdělení se říká *normální* a jednoznačně určeno svou střední hodnotou a rozptylem.

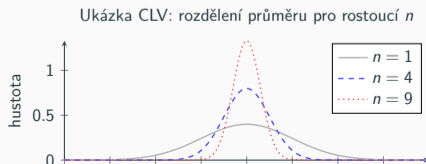
Zákon velkých čísel (ZVČ):

Pokud máme nezávislé veličiny se stejným rozdělením (např. opakované hody mincí), potom průměr pozorovaných hodnot $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ se s rostoucím n blíží střední hodnotě:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mathbb{E}[X]$$

Centrální limitní věta (CLV):

Pro velké n má normovaný součet (nebo průměr) mnoha nezávislých veličin přibližně **normální rozdělení**. $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]) \approx \mathcal{N}(0, \text{Var}(X))$.

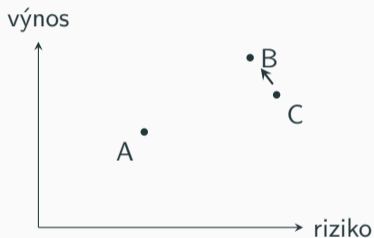


- Nejisté (budoucí) hodnoty většinou modelujeme pomocí náhodných veličin.
- Veličiny s mnoha hodnotami buď považujeme za spojité (viz příští roky) nebo naopak z výpočetních důvodů agregujeme na diskrétní n.v. s rozumným počtem hodnot
- Pokud X určuje příjem, pak $\mathbb{E}(X)$ považujeme za střední výnos a pomocí Var (případně σ) kvantifikujeme riziko.
- Mnohé praktické situace se vyznačují vyvažováním (tradeoff) mezi výnosem a rizikem
- Existují i sofistikovanější míry rizika než rozptyl (který penalizuje tak ztráty jak výnosy), viz další přednášky.

- Relace dominance (vzhledem k výnosu a riziku) není úplná (ani když bychom přidali rovnost) – tzn existují nesrovatelné varianty

Užitkové funkce

- Relace dominance (vzhledem k výnosu a riziku) není úplná (ani když bychom přidali rovnost) – tzn existují nesrovnatelné varianty
- Ani "ekvivalence" nesrovnatelných variant není transitivní:



$$A \sim C, A \sim B \not\Rightarrow B \sim C$$

- Relace dominance (vzhledem k výnosu a riziku) není úplná (ani když bychom přidali rovnost) – tzn existují nesrovnatelné varianty
- Ani "ekvivalence" nesrovnatelných variant není transitivní:
- Toto lze "obejít" konceptem užitkové funkce:

- Relace dominance (vzhledem k výnosu a riziku) není úplná (ani když bychom přidali rovnost) – tzn existují nesrovnatelné varianty
- Ani "ekvivalence" nesrovnatelných variant není transitivní:
- Toto lze "obejít" konceptem užitkové funkce:
 - Předpokládá se, že příjem x (může být záporný) má pro nás subjektivní hodnotu $u(x)$, kde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je užitková funkce, a pokud je příjem náhodný, zvolíme ten, který má vyšší střední užitek: $X \prec Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) < \mathbb{E}u(Y)$,

- Relace dominance (vzhledem k výnosu a riziku) není úplná (ani když bychom přidali rovnost) – tzn existují nesrovnatelné varianty
- Ani "ekvivalence" nesrovnatelných variant není transitivní:
- Toto lze "obejít" konceptem užitkové funkce:
 - Předpokládá se, že příjem x (může být záporný) má pro nás subjektivní hodnotu $u(x)$, kde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je užitková funkce, a pokud je příjem náhodný, zvolíme ten, který má vyšší střední užitek: $X \prec Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) < \mathbb{E}u(Y)$,
 - značíme $X \sim Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) = \mathbb{E}u(Y)$, v tomto případě říkáme, že jsme mezi X a Y indiferentní

- Relace dominance (vzhledem k výnosu a riziku) není úplná (ani když bychom přidali rovnost) – tzn existují nesrovnatelné varianty
- Ani "ekvivalence" nesrovnatelných variant není transitivní:
- Toto lze "obejít" konceptem užitkové funkce:
 - Předpokládá se, že příjem x (může být záporný) má pro nás subjektivní hodnotu $u(x)$, kde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je užitková funkce, a pokud je příjem náhodný, zvolíme ten, který má vyšší střední užitek: $X \prec Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) < \mathbb{E}u(Y)$,
 - značíme $X \sim Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) = \mathbb{E}u(Y)$, v tomto případě říkáme, že jsme mezi X a Y indiferentní
 - Je rozumné předpokládat, že u je rostoucí (chceme víc) a konkávní (tisící koruna má pro nás menší hodnotu než první), Viz základy ekonomie (zákon klesajícího marginálního užitku)

Užitkové funkce

- Relace dominance (vzhledem k výnosu a riziku) není úplná (ani když bychom přidali rovnost) – tzn existují nesrovnatelné varianty
- Ani "ekvivalence" nesrovnatelných variant není transitivní:
- Toto lze "obejít" konceptem užitkové funkce:
 - Předpokládá se, že příjem x (může být záporný) má pro nás subjektivní hodnotu $u(x)$, kde $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je užitková funkce, a pokud je příjem náhodný, zvolíme ten, který má vyšší střední užitek: $X \prec Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) < \mathbb{E}u(Y)$,
 - značíme $X \sim Y \Leftrightarrow \mathbb{E}u(X) = \mathbb{E}u(Y)$, v tomto případě říkáme, že jsme mezi X a Y indiferentní
 - Je rozumné předpokládat, že u je rostoucí (chceme víc) a konkávní (tisící koruna má pro nás menší hodnotu než první), Viz základy ekonomie (zákon klesajícího marginálního užitku)
 - Viz též von Neumann-Morgensternova teorie užitku

- Užitková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)

Střední užitek

- Užitková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)
- Jednotlivec rozhodující se podle středního užitku je

Střední užitek

- Užitková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)
- Jednotlivec rozhodující se podle středního užitku je **rizikově averzní (RA)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X)$

Střední užitek

- Užitková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)
- Jednotlivec rozhodující se podle středního užitku je
rizikově averzní (RA) $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X)$
rizikově neutrální (RN) $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) = u(\mathbb{E}X)$

Střední užitek

- Užitková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)
- Jednotlivec rozhodující se podle středního užitku je
rizikově averzní (RA) $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X)$
rizikově neutrální (RN) $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) = u(\mathbb{E}X)$
milující riziko (RL) $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X)$

Střední užitek

- Užitková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)
- Jednotlivec rozhodující se podle středního užitku je
 - rizikově averzní (RA)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je konkávní
 - rizikově neutrální (RN)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) = u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je rostoucí afinní ($\sim x$)
 - milující riziko (RL)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je konvexní

Střední užitek

- Užitková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)
- Jednotlivec rozhodující se podle středního užitku je
 - rizikově averzní (RA)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je konkávní
 - rizikově neutrální (RN)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) = u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je rostoucí afinní ($\sim x$)
 - milující riziko (RL)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je konvexní

Jensenova nerovnost: Pro každou n.v. s $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$ a konvexní u , $\mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X)$

Střední užitek

- Užitková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)
- Jednotlivec rozhodující se podle středního užitku je
 - rizikově averzní (RA)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je konkávní
 - rizikově neutrální (RN)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) = u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je rostoucí afinní ($\sim x$)
 - milující riziko (RL)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je konvexní

Jensenova nerovnost: Pro každou n.v. s $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$ a konvexní u , $\mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X)$

Důkaz: \Leftarrow RL: použij J.N, RA: použij J.N. na $-u$, RN: u je konvexní i konkávní \Rightarrow dle J.N. je vlevo \leq i \geq .

Střední užitek

- Užítková funkce je invariantní vzhledem k posunutí a škálování ($u(\bullet)$ a $a + bu(\bullet)$, $b > 0$ indukují stejnou relaci)
- Jednotlivec rozhodující se podle středního užitku je
 - rizikově averzní (RA)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \leq u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je konkávní
 - rizikově neutrální (RN)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) = u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je rostoucí afinní ($\sim x$)
 - milující riziko (RL)** $\Leftrightarrow \forall X : \mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X) \Leftrightarrow u$ je konvexní

Jensenova nerovnost: Pro každou n.v. s $\mathbb{E}X \in \mathbb{R}$ a konvexní u , $\mathbb{E}u(X) \geq u(\mathbb{E}X)$

Důkaz: \Leftarrow RL: použij J.N, RA: použij J.N. na $-u$, RN: u je konvexní i konkávní \Rightarrow dle J.N. je vlevo \leq i \geq .

\Rightarrow RA: $\forall x < y, p \in (0,1)$, uvažuj příjem $X = ((x, p), (y, 1 - p))$. Máme

$pu(x) + (1 - p)u(y) = \mathbb{E}u(X) \stackrel{R.A.}{\leq} u(\mathbb{E}X) = u(px + (1 - p)y)$. RL: podobně. RN: konkávní & konvexní = afinní.

Jistotní ekvivalent

Jistotní ekvivalent (certainty equivalent) $CE = CE_u(X)$ náhodného příjmu X vzhledem k užitkové funkci u je nenáhodný příjem splňující

$$u(CE) = \mathbb{E}u(X)$$

(tedy příjem, který by vynahradil nejistotu). Pokud je u striktně rostoucí *spojitá*,

$$CE = u^{-1}(\mathbb{E}u(X))$$

Jistotní ekvivalent

Jistotní ekvivalent (certainty equivalent) $CE = CE_u(X)$ náhodného příjmu X vzhledem k užitkové funkci u je nenáhodný příjem splňující

$$u(CE) = \mathbb{E}u(X)$$

(tedy příjem, který by vynahradil nejistotu). Pokud je u striktně rostoucí spojitá,

$$CE = u^{-1}(\mathbb{E}u(X))$$

Jistotní ekvivalent může sloužit jako míra rizikové averze spojené s daným konkrétním příjmem: čím větší RA, tím *nižší* CE (čím jsem rizikově averznější, tím víc jsem ochoten platit za jistotu)

$$CE < \mathbb{E}X \Rightarrow RA, CE = \mathbb{E}X \Rightarrow RN, CE > \mathbb{E}X \Rightarrow RL$$

Anketa: Kterou možnost preferujete

1A Získat 1000 s jistotou

1B Získat buď 500 nebo 1300, obojí se stejnou pravděpodobností 0.5

Anketa: Kterou možnost preferujete

2A Vsadit si 10 s tím, s pravděpodobností 0.00009 vyhraje 100000

2B Nevsázet nic

Anketa: Kterou možnost preferujete

3A Získat 1000 s jistotou

3B Získat buď 500 nebo 1700, obojí se stejnou pravděpodobností 0.5

Anketa: Kterou možnost preferujete

4A Pojistit se za 10 proti škodě 100000, která nastane s pravděpodobností 0.00009

4B Nepojistit se

Anketa: Kterou možnost preferujete

1A Získat 1000 s jistotou $\Rightarrow \mathbb{E}X = 1000, \sigma(X) = 0$

1B Získat buď 500 nebo 1300, obojí se stejnou prstí 0.5
 $\Rightarrow \mathbb{E}X = 900, \sigma(X) > 0$

$\Rightarrow A$ dominuje B

Anketa: Kterou možnost preferujete

2A Vsadit si 10 s tím, s pravděpodobností 0.00009 vyhraje 100000

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = 0.00009 \times (100000 - 10) + 0.99991 \times (-10) = -1, \sigma(X) > 0$$

2B Nevsázet nic $\Rightarrow \mathbb{E}X = 0, \sigma(X) = 0$

$\Rightarrow B$ dominuje A

Anketa: Kterou možnost preferujete

3A Získat 1000 s jistotou $\Rightarrow \mathbb{E}X = 1000, \sigma(X) = 0$

3B Získat buď 500 nebo 1700, obojí se stejnou prstí 0.5
 $\Rightarrow \mathbb{E}X = 1100, \sigma(X) > 0$

\Rightarrow žádná dominance

Anketa: Kterou možnost preferujete

4A Pojistit se za 10 proti škodě 100000, která nastane s pravděpodobností 0.00009 $\Rightarrow \mathbb{E}X = -10, \sigma(X) = 0$

4B Nepojistit se $\Rightarrow \mathbb{E}X = -9, \sigma(X) > 0$

\Rightarrow žádná dominance

1. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1300, 0.5))$ (v průměru 900 nejistě)
2. sázka - A: $((-10, 0.99991), (99990, 0.00009))$ (v průměru -1 nejistě), B: 0 jistě
3. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1700, 0.5))$ (v průměru 1100 nejistě)
4. pojištění A: -10 jistě, B: $((-100000, 0.00009), (0.00009))$ (v průměru -9 nejistě)

1. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1300, 0.5))$ (v průměru 900 nejistě)
2. sázka - A: $((-10, 0.99991), (99990, 0.00009))$ (v průměru -1 nejistě), B: 0 jistě
3. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1700, 0.5))$ (v průměru 1100 nejistě)
4. pojištění A: -10 jistě, B: $((-100000, 0.00009), (0.00009))$ (v průměru -9 nejistě)

Předp. že máme striktně rostoucí spojitou u.f. u

Vyhodnocení*

1. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1300, 0.5))$ (v průměru 900 nejistě)
2. sázka - A: $((-10, 0.99991), (99990, 0.00009))$ (v průměru -1 nejistě), B: 0 jistě
3. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1700, 0.5))$ (v průměru 1100 nejistě)
4. pojištění A: -10 jistě, B: $((-100000, 0.00009), (0.00009))$ (v průměru -9 nejistě)

Předp. že máme striktně rostoucí spojitou u.f. u

$$\mathbf{1A} \text{ (18 hlasů) } u(CE) = \mathbb{E}u(B) \stackrel{\text{volba A}}{\leq} \mathbb{E}u(A) = u(1000) \\ \Rightarrow CE \leq 1000 \text{ (ale nevím zda } \leq \mathbb{E}B, \text{ což by značilo RA)}$$

$$\mathbf{1B} \text{ (0 hlasů) } u(CE) = \mathbb{E}u(B) \stackrel{B}{\geq} \mathbb{E}u(A) = u(1000) > u(900) = u(\mathbb{E}B) \\ \Rightarrow CE \geq 900 = \mathbb{E}B \Rightarrow \text{v tomto kontextu jsem RL}$$

Volba 1B navíc vyvrací konkavitu u (takže v tom případě obecně nejsem RA)

Vyhodnocení*

1. příjem - A: 1000 jistě, B: ((500, 0.5), (1300, 0.5)) (v průměru 900 nejistě)
2. sázka - A: ((-10, 0.99991), (99990, 0.00009)) (v průměru -1 nejistě), B: 0 jistě
3. příjem - A: 1000 jistě, B: ((500, 0.5), (1700, 0.5)) (v průměru 1100 nejistě)
4. pojištění A: -10 jistě, B: ((-100000, 0.00009), (0.00009)) (v průměru -9 nejistě)

Předp. že máme striktně rostoucí spojitou u.f. u

$$\mathbf{2A} \text{ (6 hlasů) } u(CE) = \mathbb{E}u(A) \stackrel{A}{\geq} u(B) = u(0) > u(-1) = u(\mathbb{E}A) \\ \Rightarrow CE > -1 = \mathbb{E}A \Rightarrow \text{zde jsem RL}$$

$$\mathbf{2B} \text{ (12 hlasů) } u(CE) \stackrel{B}{\leq} u(B) = u(0) \\ \Rightarrow CE < 0 \text{ (loterii hodnotím jako ztrátu)}$$

Volba 1A navíc vyvrací konkavitu u , tedy obecnou RA

Vyhodnocení*

1. příjem - A: 1000 jistě, B: ((500, 0.5), (1300, 0.5)) (v průměru 900 nejistě)
2. sázka - A: ((-10, 0.99991), (99990, 0.00009)) (v průměru -1 nejistě), B: 0 jistě
3. příjem - A: 1000 jistě, B: ((500, 0.5), (1700, 0.5)) (v průměru 1100 nejistě)
4. pojištění A: -10 jistě, B: ((-100000, 0.00009), (0.00009)) (v průměru -9 nejistě)

Předp. že máme striktně rostoucí spojitou u.f. u

$$\mathbf{3A} \text{ (3 hlasy) } u(CE) = \mathbb{E}u(B) \stackrel{\text{volba A}}{\leq} \mathbb{E}u(A) = u(1000) < u(1100) = u(\mathbb{E}B) \\ \Rightarrow CE \leq 1000 < \mathbb{E}B \Rightarrow \text{jsem zde RA}$$

$$\mathbf{3B} \text{ (15 hlasů) } u(CE) = \mathbb{E}u(B) \stackrel{\text{volba B}}{\geq} \mathbb{E}u(A) = u(1000) \Rightarrow CE \geq 1000 < \mathbb{E}B \\ \Rightarrow \text{postoj k riziku nelze rozhodnout}$$

Respondenti s 3A jsou zde více RA než respondenti 3B.

1. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1300, 0.5))$ (v průměru 900 nejistě)
2. sázka - A: $((-10, 0.99991), (99990, 0.00009))$ (v průměru -1 nejistě), B: 0 jistě
3. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1700, 0.5))$ (v průměru 1100 nejistě)
4. pojištění A: -10 jistě, B: $((-100000, 0.00009), (0.00009))$ (v průměru -9 nejistě)

Předp. že máme striktně rostoucí spojitou u.f. u

$$\mathbf{4A} \text{ (13 hlasů) } u(CE) = \mathbb{E}u(B) \leq \mathbb{E}u(A) = u(-10)$$

$$\Rightarrow CE \leq -10 \leq -9 = \mathbb{E}B \Rightarrow \text{jsem zde RA}$$

$$\mathbf{4B} \text{ (5 hlasů) } u(CE) = \mathbb{E}u(B) \geq \mathbb{E}u(A) = u(-10)$$

$$\Rightarrow CE \geq -10 \Rightarrow \text{RA/RL nelze rozhodnout}$$

Respondenti s 3A jsou zde více RA než respondenti 3B.

Vyhodnocení*

1. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1300, 0.5))$ (v průměru 900 nejistě)
2. sázka - A: $((-10, 0.99991), (99990, 0.00009))$ (v průměru -1 nejistě), B: 0 jistě
3. příjem - A: 1000 jistě, B: $((500, 0.5), (1700, 0.5))$ (v průměru 1100 nejistě)
4. pojištění A: -10 jistě, B: $((-100000, 0.00009), (0.00009))$ (v průměru -9 nejistě)

Předp. že máme striktně rostoucí spojitou u.f. u

	1	2	3	4
A	RL	RL	RA	RA
B	?	?	?	?

s prokazatelnou RL & RA: 5 z 18

Exponenciální užitková funkce

$$u(x) = -\exp\{-ax\}$$

a – koeficient rizikové averze ($a \downarrow \Rightarrow u$ je "konkávnější" \Rightarrow riziková averze je větší)

$$u(x) = -\exp\{-ax\}$$

a – koeficient rizikové averze ($a \downarrow \Rightarrow u$ je "konkávnější" \Rightarrow riziková averze je větší)

Vlastnost. u je invariantní vůči posunutí (ve smyslu že $u(c + x)$ indukuje stejné preference jako $u(x)$)

$$u(x) = -\exp\{-ax\}$$

a – koeficient rizikové averze ($a \downarrow \Rightarrow u$ je "konkávnější" \Rightarrow riziková averze je větší)

Vlastnost. u je invariantní vůči posunutí (ve smyslu že $u(c + x)$ indukuje stejné preference jako $u(x)$)

\Rightarrow této funkci se říká **konstantně rizikově averzní (CARA)** (absolutní přírůstky hodnotíme stejně nezávisle na tom "kolik už máme")

$$u(x) = -\exp\{-ax\}$$

a – koeficient rizikové averze ($a \downarrow \Rightarrow u$ je "konkávnější" \Rightarrow riziková averze je větší)

Vlastnost. u je invariantní vůči posunutí (ve smyslu že $u(c + x)$ indukuje stejné preference jako $u(x)$)

\Rightarrow této funkci se říká **konstantně rizikově averzní (CARA)** (absolutní přírůstky hodnotíme stejně nezávisle na tom "kolik už máme")

Poznámka. Nenechte se zmást negativitou funkce, důležité jsou jen absolutní rozdíly, viz výše.

Příklad – jistotní ekvivalent

Příklad 4.1. S pravděpodobností 30% získáme 1000, s pravděpodobností 60% získáme 100, s pravděpodobností 10% nic. Jaký je jistotní ekvivalent našeho příjmu při expomenciální užitkové funkci se parametrem $a = 0.001$?

Řešení. Nejprve určíme inverzi u :

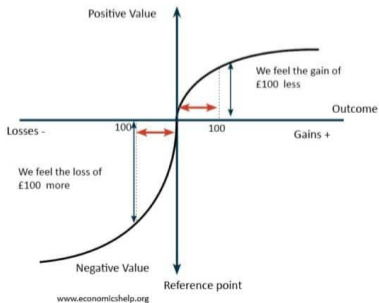
$$u^{-1}(y) = -\frac{\ln(-y)}{a} = -1000 \ln(-y).$$

Dosadíme do vzorce pro jistotní ekvivalent:

$$\begin{aligned} CE &= u^{-1}(\mathbb{E}u(X)) = u^{-1}(0.3u(1000) + 0.6u(100) + 0.1u(0)) \\ &= u^{-1}(- (0.3e^{-0.001 \cdot 1000} + 0.6e^{-0.001 \cdot 100} + 0.1e^{-0.001 \cdot 0})) = u^{-1}(- (0.3e^{-1} + 0.6e^{-0.1} + 0.1)). \\ &= -1000 \ln(0.3e^{-1} + 0.6e^{-0.1} + 0.1) \approx 283, 3. \end{aligned}$$

Která užitková funkce je ta správná

- Používají se různé třídy funkcí, většinou hlavně pro různé příznivé terotecické vlastnosti (kromě CARA viz též CRRA funkce)
- Velmi často byla správnost těchto učebnicových voleb experimentálně vyvrácena
- Obecně volba závisí na kontextu (jak aplikačním, tak teoretickém)
- "Stálicí" je prospektová užitková funkce Kahnemana a Tverského (Nobelova cena), kteří kromě jejího použití dávají větší váhu malým pravděpodobnostem.



- Různé příjmy lze jednoznačně srovnávat pomocí dominance, většina je však nesrovnatelná (protože dominované varianty většinou vypadnou z trhu)
- Pokud předpokládáme existenci užitkové funkce a rozhodování pomocí středního užitku, můžeme srovnat libovolné náhodné příjmy (nikde však není zaručeno, že se lidé takto rozhodují)
- Konkavita / konvexita užitkové funkce zaručuje rizikovou averzi / lásku k riziku
- Rizikovou averzi lze měřit (či odhadovat) pomocí jistotního ekvivalentu, který lze vylákat (elicit) pomocí experimentů
- Asi jediná obecně přijímaná a dosud ne úplně zpochybněná účelová funkce je prospektová, těžko se s ní však pracuje v modelech.

Cenné papíry

Krátkodobé cenné papíry — doba do splatnosti do 1 roku.

- Typicky používají **jendoduché úročení a diskontování**.
- Používají se zejména:
 - ve finančním řízení podniku,
 - pro řízení likvidity bank a investorů.

Směnka (bill of exchange) = písemný příslib platby

Náležitosti směnky

- **dlužník (směnečník)** je povinen zaplatit
- **emitent (Výstavce)** směnku vystavuje (=směnečník – **vlastní směnka**, \neq – **cizí směnka**)
- **splatnost** :**na viděnou** – při předložení, **na určitý čas**, **na určitý čas po viděné**.
- další právní náležitosti

Směnka je přenositelná **rubopisem** (indosamentem) – postupující ovšem za směnku ručí těm, jimž ji postoupil.

Šek - lze považovat za směnku na cizí řad se splatností "na viděnou"

(bankovky – bank notes – byly původně něčím jako směnkami)

Krátkodobý úvěr, kdy banka odkupuje směnku před dobou její splatnosti za nižší cenu.

- Banka si ponechává **diskont**: (úrok) – rozdíl mezi jmenovitou (splatnou) a skutečně vyplacenou částkou. za celé zbývající období do splatnosti.

Příklad 5.1. Podnikatel eskontoval dne 15. 4. směnku na 3 000 000 Kč se splatností 15. 5. Jakou částku mu banka vyplatí, je-li diskontní sazba 10 % p.a.?

Řešení.

$$P = S \left(1 - d \frac{k}{360} \right) = 3\,000\,000 \left(1 - 0,10 \cdot \frac{30}{360} \right) = 2\,975\,000 \text{ Kč.}$$

Pokladniční poukázka (T-bill)

Krátkodobý státní dluhopis vydávaný Ministerstvem financí ČR (popř. ČNB).

Závazek vyplatit určitou částku v daný čas (půjčka státu)

- Emise probíhá formou aukce.
- Slouží k **krátkodobému krytí státního deficitu**.
- **Bezkuponová forma** – prodává se s diskontem, splácí se nominální hodnota.
- V zahraničí obdobně: USA – T-bills.

Depozitní certifikát (CD – certificate of deposit)

Krátkodobý obchodovatelný cenný papír vydávaný bankou.

Závazek vyplatit určitou částku v daný čas (půjčka bance)

- Úrok může být i variabilní
- Někdy lze splatit předčasně

~ termínovaný vklad (ten ale není obchodovatelný)

Diskontní CD: prodává se pod nominální hodnotou, úrok je obsažen v rozdílu.

Dluhopis (obligace, bond)

Dlouhodobý CP – závazek emitenta (dlužníka) vůči věřiteli (držiteli dluhopisu).

Emitent se zavazuje:

- splatit **nominální hodnotu** k datu splatnosti,
- vyplácet **kupónové platby** – pravidelné úroky (kupóny),
- kupónová sazba bývá uvedena v %.

Typy dluhopisů

- **Zero-coupon bond** – bezkupónový, s diskontem.
- **Kupónový** – vyplácí pravidelný úrok.
- **S proměnlivou sazbou (floater)** – úrok podle tržní sazby (např. PRIBOR + 1 %).
- **S možností předčasného splacení (callable)** – může být splacen dříve.
- **Vyměnitelný (convertible)** – za akcie emitenta.
- **Krytý aktivy (asset-backed bond)** – zajištěný aktivy.

Emitenti

- **Government bond** – státní dluhopis (vláda, ministerstvo financí).
- **Municipal bond** – regionální či obecní správa.
- **Corporate bond** – podnikový dluhopis (např. ČEZ).

Vnitřní cena dluhopisu (současná hodnota PV)

$$PV = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C+F}{(1+i)^m} = F[c a_{m|i} + v^m],$$

- $v = \frac{1}{1+i}$, $a_{m|i} = \frac{1-v^m}{i}$.
- C – kupónová částka = nominál \times sazba $c = F \cdot c$,
- F – nominální hodnota (face value),
- i – ocenovací úroková míra,
- m – doba do splatnosti (maturity).

Příklad 5.2. Najděte 2. 1. října 2020 vnitřní cenu kupónového dluhopisu s nominální hodnotou 10 000 Kč, kupónovou sazbou 12 % p.a. a dnem splatnosti 1. dubna 2028. Tržní polhůtní výnos je 10 % p.a., kupóny jsou vypláceny vždy 1. dubna a 1. října. Tržní cena k 1. říjmu 2020 je 10 200 Kč. Je výhodné jej koupit?

Řešení.

$$F = 10\,000, \quad c = 0,12, \quad i = 0,10, \quad m = 15.$$

$$PV = F [c a_{15|5\%} + v^{15}] = 10\,000 \left[0,06 \cdot \frac{1 - (1,05)^{-15}}{0,05} + (1,05)^{-15} \right] = 10,308 \text{ Kč.}$$

⇒ dluhopis je na trhu **podhodnocen**, investice je tedy výhodná.

Výnosnost do splatnosti (Yield to Maturity, YTM)

Výnosnost do splatnosti je vnitřní míra výnosnosti (IRR) peněžních toků z dluhopisu:

$$P = \frac{C}{(1+i^*)} + \frac{C}{(1+i^*)^2} + \cdots + \frac{C+F}{(1+i^*)^n}.$$

kde P je tržní cena.

Prodej dluhopisu

- $P = F$ — prodej za nominální hodnotu (*sold at par*) $\Leftrightarrow i^* = c$.

$$D: P = P(c a_{n|i^*} + v_{i^*}^n) \Leftrightarrow 1 = c \frac{1-v^n}{i^*} + v^n \Leftrightarrow 1-v^n = (1-v^n) \frac{c}{i^*}$$

- $P < F$ — s diskontem (*sold at discount*) $\Leftrightarrow i^* > c$
- $P > F$ — s premií (*sold at premium*) $\Leftrightarrow i^* < c$.

Příklad 5.3. Najděte k 1. 11. 2025 výnosnost do splatnosti kupónového dluhopisu s tržní cenou 10 800 Kč, nominální hodnotou 10 000 Kč a kupónovou sazbou 14,6 % p.a. Splatnost je 1. 11. 2028 a kupóny jsou placeny ročně (k 1. 11.).

Řešení.

$$C = Fc = 10\,000 \cdot 0,14 = 1,400, \quad n = 3.$$

$$10,800 = \frac{1,460}{(1 + i^*)} + \frac{1,460}{(1 + i^*)^2} + \frac{11,460}{(1 + i^*)^3}.$$

Numerickým řešením (Excel: =IRR(-10800,1460,1460,11460))

$$i^* \approx 0,1137 \approx 11,4\% \text{ p.a.}$$

(Pozvrzuje, že dluhopis je **s prémieí**).

Výnosová křivka (Yield Curve)

Zobrazuje závislost výnosů (YTM) dluhopisů i^* na době do splatnosti.

- Typicky pro srovnatelné dluhopisy (např. státní, rating AA).



Příklad: výnosová křivka státních dluhopisů US říjen 2025

(<https://www.investing.com/rates-bonds/usa-government-bonds>)

Durace dluhopisu (podle Macaulaye)

Vážený průměr dob splatnosti jednotlivých CF dluhopisu, kde váhami jsou poměry příslušných diskontovaných příjmů:

$$D = D(i) = \frac{1 \cdot Cv + 2 \cdot Cv^2 + \dots + n \cdot (C + F)v^n}{\underbrace{Cv + Cv^2 + \dots + (C + F)v^n}_{=PV(i)}}, \quad v = \frac{1}{1+i}$$

Pozn.: Primárně byla určena pro porovnávání cen dluhopisů.

Durace ve speciálních případech

- Bezkuponový dluhopis: $D = n$
- Konzola (dluhopis bez splatnosti): $D = \frac{1}{i}$

Pozn.: Pro $n \rightarrow \infty$ přechází durace k $\frac{1}{i}$.

Durace – vztah k derivaci ceny

$$\frac{\partial}{\partial i} PV(i) = \frac{\partial}{\partial i} v(i) \frac{\partial}{\partial V} PV(v)|_{v=v(i)} = -v^2(i) \frac{D(i)PV(i)}{v(i)} = \frac{D(i)PV(i)}{1+i}$$

Zajímá nás citlivost PV na změny i :

$$\Delta PV(i + \Delta i) - PV(i) \approx (\Delta i)F'(i) = (\Delta i) \frac{D(i)PV(i)}{1+i}$$

Po úpravě:

$$\frac{\Delta PV(i + \Delta i) - PV(i)}{PV(i)} \approx -\frac{D(i)}{1+i} \Delta i$$

Durace tedy udává citlivost ceny dluhopisu na změnu úrokové míry: o kolik relativně poklesne PV pokud i vzroste o jednotku (minus nějaké drobné)

Příklad

Příklad 5.4. Uvažujme tříletý dluhopis s nominální hodnotou 1 000 EUR a kupónovou sazbou 8 % p.a. Najděte jeho duraci a odhadněte změnu ceny při zvýšení úrokové míry z 10 % na 11 % p.a.

Řešení.

Rok	Příjem	Diskontovaný příjem	Vážené sčítance
1	80	$80/(1,1)^1 = 72,73$	$1 \times 72,73 = 72,73$
2	80	$80/(1,1)^2 = 66,12$	$2 \times 66,12 = 132,24$
3	1080	$1080/(1,1)^3 = 811,42$	$3 \times 811,42 = 2434,26$
		$PV = 950,27 \text{ EUR}$	$\text{čitatel} = 2639,23$

$$D = \frac{2639,23}{950,27} = 2,78 \text{ roku.}, \quad \Delta PV \approx -PV \cdot D \cdot \frac{\Delta i}{1+i} = -950,27 \cdot 2,77 \cdot \frac{0,01}{1,10} = -24,02 \text{ EUR.}$$

Odhadovaná nová cena: $950,27 - 24,02 = 926,25 \text{ EUR.}$

Příklad 5.5. Uvažujme tříletý dluhopis s $F = 1000$, $c = 0,10$, koupený za nominální cenu. Pravděpodobnost krachu emitenta (po němž už žádné platby nepřijdou) během každého jednotlivého roku je $0,01$, nezávisle na ostatních letech. Jaká je střední současná hodnota (PV) a její směrodatná odhylka? Předpokládej $i = c$ a roční kupóny.

Řešení. Máme $F = 1000$, $c = i = 0,10$, tedy $C = Fc = 100$ a $v = \frac{1}{1,10} = 0,9090909$.

Scénář	p_s	PV_s	$p_s PV_s$	$p_s PV_s^2$
1. Default během 1. roku	0,01	0	0	0
2. Default během 2. roku	0,01	$Cv = 90,91$	0,91	82,64
3. Default během 3. roku	0,01	$Cv + Cv^2 = 173,55$	1,74	301,21
4. Přežije všechny 3 roky	0,97	$Cv + Cv^2 + (F+C)v^3 = 1000,00$	970,00	970 000,00
celkem	1,00		972,64	970 383,85

$$\mathbb{E}[PV] = \sum p_s PV_s = \boxed{972,64}. \quad \text{Var}(PV) = \sum p_s PV_s^2 - \left(\sum p_s PV_s\right)^2 = 970\,383,85 - 972,64^2 \approx \boxed{24\,346,28}.$$

$$\sigma \approx \boxed{156,03}.$$

Rating dluhopisů

- **Rating** = hodnocení úvěrové spolehlivosti emitenta (nebo konkrétní emise).
- Udává pravděpodobnost, že emitent **splní své závazky** v plné výši a včas.
- Stanovují jej nezávislé ratingové agentury: například **Standard & Poor's (S&P)**, **Moody's** či **Fitch Ratings**.

S&P / Fitch	Moody's	Kategorie
AAA	Aaa	Nejvyšší kvalita, minimální riziko
AA	Aa	Velmi vysoká kvalita
A	A	Dobrá kvalita
BBB	Baa	Střední kvalita (poslední „investiční“)
BB, B, CCC, ...	Ba, B, Caa, ...	Spekulativní (rizikové) dluhopisy

HOSPODÁŘSKÉ NOVINY

BYZNYS ZPRÁVY NÁZORY TECH REALITY INVESTICE PODCASTY HRN Průběh ARCHIV DALŠÍ Běhuť

HN.cz > Specially HN > Bazar 2023/2 Sdílet Přidat do playlistu Přidat prošívkou Odebrnout oznámení

ROZHOVOR

Brzy padnou další dluhopisová letadla, spousta neplech nás čeká i v investičních fondech, říká Dočekal

David Barta vedoucí redaktor investiční rubriky Odebrat autora
10. 10. 2023 10:21 • Aktuálně.cz • 20 min. čtení [Přeshrát článek](#)



Martin Dočekal, investiční analytik a profibral. Autor: Thomas Muzka

Obliba firemních dluhopisů mezi českými domácnostmi se může jevit jako těžko pochopitelná kratochvíle, neboť výnosy často ani nžleka nepokryjí riziko. Podle analytika Martina Dočekala pořád Češi vnímají bondy jako konzervativní investici, protože jsou jim prodávány s přívlastky, které je vykušují jako bezpečné, zajištěné nebo garantující výnos. Podle Dočekala se dluhopisy dostávají lidem do portfolií přes některé poradce a dalšími cestami.



TESCO Online Nákupy
Děkujeme vám za vaši důvěru v naši značku.

Bez kofeínu | Prohlášení 100% je zcela bez reklamá.

Vícekriteriální přístup k výhosu a riziku

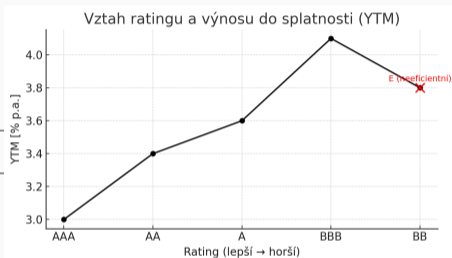
Anketa: Do kterého z těchto dluhopisů byste určitě neinvestovali?

Dluhopis	Rating	YTM [% p.a.]
A	AAA	3.0
B	AA	3.4
C	A	3.6
D	BBB	4.1
E	BB	3.8

Vícekriteriální přístup k výnosu a riziku

Anketa: Do kterého z těchto dluhopisů byste určitě neinvestovali?

Dluhopis	Rating	YTM [% p.a.]
A	AAA	3.0
B	AA	3.4
C	A	3.6
D	BBB	4.1
E	BB	3.8

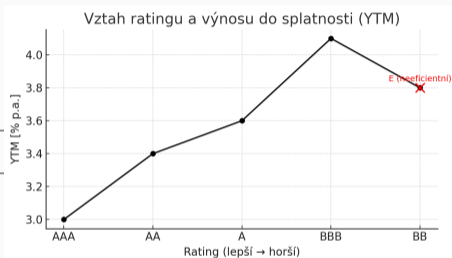


Varianta je **dominovaná**, pokud existuje jiná varianta, která není horší v žádném kritériu, přičemž v jednom je striktně lepší (na grafu: existuje bod severozápadně od ní)

Vícekriteriální přístup k výnosu a riziku

Anketa: Do kterého z těchto dluhopisů byste určitě neinvestovali?

Dluhopis	Rating	YTM [% p.a.]
A	AAA	3.0
B	AA	3.4
C	A	3.6
D	BBB	4.1
E	BB	3.8



Varianta je **dominovaná**, pokud existuje jiná varianta, která není horší v žádném kritériu, přičemž v jednom je striktně lepší (na grafu: existuje bod severozápadně od ní)

Racionální agent neinvestuje do dominovaných variant.

Kod	typ	splatnost	rating	F	c (%)	P
T1	st. pokl. poukázka	1	AA	1000	-	P_{T1}
T2	st. pokl. poukázka	4	AA	10000	-	P_{T2}
O1	obligace	3	AA	1000	3	P_{O1}
O2	obligace	3	A	5000	5	P_{O2}
O3	obligace	3	A	1000	4	P_{O3}

1. Nakreslete výnosovou křivku pro kategori AA (pro obligaci vezměte za dobu splatnosti duraci, jako úrokovou míru při jejím výpočtu použijte YTM). V čase nula přepokládejte výnos 0. Známé body křivky spojte lineárně. Stačí rukou, ale hodnoty x a y (druhé v procentech) vypište na dvě desetinná místa. Při výpočtu lze použít tabulkový procesor, postup řesto zapište.

Kod	typ	splatnost	rating	F	c (%)	P
T1	st. pokl. poukázka	1	AA	1000	-	P_{T1}
T2	st. pokl. poukázka	4	AA	10000	-	P_{T2}
O1	obligace	3	AA	1000	3	P_{O1}
O2	obligace	3	A	5000	5	P_{O2}
O3	obligace	3	A	1000	4	P_{O3}

2. Je některá z možností dominována? Za srovnatelné považujte pouze dvojice s rozdílem dob splatnosti maximálně jeden rok (u obligací je doba splatnosti určena durací). Pokud ano, jakou by musela mít nejvyšší cenu, aby přestala být dominovanou? Cenu určete s přesností na setiny.

Kod	typ	splatnost	rating	F	c (%)	P
T1	st. pokl. poukázka	1	AA	1000	-	P_{T1}
T2	st. pokl. poukázka	4	AA	10000	-	P_{T2}
O1	obligace	3	AA	1000	3	P_{O1}
O2	obligace	3	A	5000	5	P_{O2}
O3	obligace	3	A	1000	4	P_{O3}

3. U kategorie A přepokládejme pravděpodobnost nesplacení 2%. Nesplacení znamená, není splacen ani jeden kupon ani F . Pro obligace O2 a O3 spočítejte střední PV, její směrodatnou odchylku a jistotní ekvivalent při užitkové funkci $u(x) = -\exp(-0.0001x)$, vše na dvě desetinná místa (jako úrokovou sazbu při výpočtu PV použijte YTM).

Akcie (Shares, Stocks)

- Akcie = cenný papír reprezentující vlastnický podíl v akciové společnosti.
- Držitel akcie = **spoluvlastník** společnosti.

Práva akcionáře

1. Právo hlasovací (na valné hromadě)
 2. Právo na dividendu
 3. Právo na podíl na likvidačním zůstatku
 4. Předkupní právo (při emisi nových akcií)
- **Nominální hodnota akcie** – podíl akcionáře na základním kapitálu.
 - **Dividenda** – platba akcionářům, rozdělená ze zisku společnosti.

- **Kmenové (obyčejné, common stock)** – základní akcie s hlasovacím právem a nárokem na dividendu.
- **Prioritní (preferenční, preferred stock)** – hybridní cenný papír kombinující znaky akcie a dluhopisu.
 - vlastníci obdrží dividendu přednostně (před obyčejnými akciemi),
 - výnosy jsou fixní v nominální hodnotě,
 - bez vlastnických práv.

- Vyjadřuje průměrné změny cen akcií vybraných společností.
- Umožňuje sledovat vývoj akciového trhu v čase.
- Počítá se z reprezentativního vzorku akcií podle jejich tržní kapitalizace (=počet jejich akcií \times jejich cena).

Hlavní akciové indexy

- **DJIA** (Dow Jones Industrial Average) – 30 průmyslových podniků USA
- **S&P 500** (Standard & Poor's 500) – 500 amerických společností
- **DAX** – index frankfurtské burzy
- **FTSE 100** – index londýnské burzy
- **PX** – index pražské burzy (BCPP)

Tržní cena

- Akcie se obchodují na k tomu určených trzích (burzy, mimoburzovní trhy)

Tržní cena

- Akcie se obchodují na k tomu určených trzích (burzy, mimoburzovní trhy)
- Tržní cena se určuje nabídka a poptávka (ve formě objednávek, zadávaných obchodníky)

Tržní cena

- Akcie se obchodují na k tomu určených trzích (burzy, mimoburzovní trhy)
- Tržní cena se určuje nabídka a poptávka (ve formě objednávek, zadávaných obchodníky)
- Obchoduje se někdy kontiunálně, někdy jen v otevíracích hodinách trhu

Tržní cena

- Akcie se obchodují na k tomu určených trzích (burzy, mimoburzovní trhy)
- Tržní cena se určuje nabídka a poptávka (ve formě objednávek, zadávaných obchodníky)
- Obchoduje se někdy kontiunálně, někdy jen v otevíracích hodinách trhu

Tržní cena

- Akcie se obchodují na k tomu určených trzích (burzy, mimoburzovní trhy)
- Tržní cena se určuje nabídka a poptávka (ve formě objednávek, zadávaných obchodníky)
- Obchoduje se někdy kontiunálně, někdy jen v otevíracích hodinách trhu

„Skutečná“ cena (True Price) = „správná“ tržní cena (která brzy nastane)

Tržní cena

- Akcie se obchodují na k tomu určených trzích (burzy, mimoburzovní trhy)
- Tržní cena se určuje nabídka a poptávka (ve formě objednávek, zadávaných obchodníky)
- Obchoduje se někdy kontinálně, někdy jen v otevíracích hodinách trhu

„Skutečná“ cena (True Price) = „správná“ tržní cena (která brzy nastane)

Metody odhadu „Skutečné“ ceny

1. **Fundamentální analýza:** předpokládá, že cena je určena budoucím hospodařením firmy a ostatními vlivy – zohledňuje ekonomické aspekty (finanční výkazy, makroekonomii, tržní riziko).

Tržní cena

- Akcie se obchodují na k tomu určených trzích (burzy, mimoburzovní trhy)
- Tržní cena se určuje nabídka a poptávka (ve formě objednávek, zadávaných obchodníky)
- Obchoduje se někdy kontinálně, někdy jen v otevíracích hodinách trhu

„Skutečná“ cena (True Price) = „správná“ tržní cena (která brzy nastane)

Metody odhadu „Skutečné“ ceny

1. **Fundamentální analýza:** předpokládá, že cena je určena budoucím hospodařením firmy a ostatními vlivy – zohledňuje ekonomické aspekty (finanční výkazy, makroekonomii, tržní riziko).
2. **Technická analýza:** předpokládá, že cenu lze předpovědět analýzou historie ceny

Tržní cena

- Akcie se obchodují na k tomu určených trzích (burzy, mimoburzovní trhy)
- Tržní cena se určuje nabídka a poptávka (ve formě objednávek, zadávaných obchodníky)
- Obchoduje se někdy kontinálně, někdy jen v otevíracích hodinách trhu

„**Skutečná**“ cena (**True Price**) = „správná“ tržní cena (která brzy nastane)

Metody odhadu „Skutečné“ ceny

1. **Fundamentální analýza:** předpokládá, že cena je určena budoucím hospodařením firmy a ostatními vlivy – zohledňuje ekonomické aspekty (finanční výkazy, makroekonomii, tržní riziko).
2. **Technická analýza:** předpokládá, že cenu lze předpovědět analýzou historie ceny
3. **Psychologická analýza:** předpokládá, že cena je výslednicí psychologie agentů.

Základní princip:

$$PV = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \dots$$

kde D_t jsou očekávané dividendy a i je požadovaná výnosová míra.

Jednoduchá fundamentální analýza – dividendové modely

Základní princip:

$$PV = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \dots$$

kde D_t jsou očekávané dividendy a i je požadovaná výnosová míra.

Model s konstantní dividendou: $PV = \frac{D}{1+i} + \frac{D}{(1+i)^2} + \dots = \frac{D}{i}$

Jednoduchá fundamentální analýza – dividendové modely

Základní princip:

$$PV = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \dots$$

kde D_t jsou očekávané dividendy a i je požadovaná výnosová míra.

Model s konstantní dividendou: $PV = \frac{D}{1+i} + \frac{D}{(1+i)^2} + \dots = \frac{D}{i}$

Model s rostoucí dividendou (Gordonův model):

$$PV = \frac{D(1+g)}{1+i} + \frac{D(1+g)^2}{(1+i)^2} + \dots = D \frac{1+g}{i-g}, \quad g < i$$

kde g = roční růst dividendy.

Jednoduchá fundamentální analýza – dividendové modely

Základní princip:

$$PV = \frac{D_1}{1+i} + \frac{D_2}{(1+i)^2} + \dots$$

kde D_t jsou očekávané dividendy a i je požadovaná výnosová míra.

Model s konstantní dividendou: $PV = \frac{D}{1+i} + \frac{D}{(1+i)^2} + \dots = \frac{D}{i}$

Model s rostoucí dividendou (Gordonův model):

$$PV = \frac{D(1+g)}{1+i} + \frac{D(1+g)^2}{(1+i)^2} + \dots = D \frac{1+g}{i-g}, \quad g < i$$

kde g = roční růst dividendy.

Problém: jak se určí i ?

Příklad – Ocenění akcie s růstem dividendy

Příklad 5.6. Stanovte cenu akcie s očekávanou výnosností 10 % p.a. a roční dividendou 75 EUR:

- (i) při konstantní dividendě,
- (ii) při růstu dividend o 5 %.

Řešení.

$$i = 0,10, \quad D = 75$$

(i) $PV = \frac{D}{i} = \frac{75}{0,10} = 750 \text{ EUR}$

(ii) $g = 0,05$

$$PV = D \frac{1 + g}{i - g} = 75 \frac{1,05}{0,10 - 0,05} = 1575 \text{ EUR.}$$

Cena akcie s růstovou dividendou je více než dvojnásobná.

Hypotéza efektivních trhů (Efficient Market Hypothesis – EMH)

- Hypotéza efektivních trhů tvrdí, že ceny finančních aktiv již odrážejí všechny dostupné informace.

Hypotéza efektivních trhů (Efficient Market Hypothesis – EMH)

- Hypotéza efektivních trhů tvrdí, že ceny finančních aktiv již odrážejí všechny dostupné informace.
- Nikdo tedy nemůže dlouhodobě „přechytračit trh“ pomocí veřejně známých informací.

Hypotéza efektivních trhů (Efficient Market Hypothesis – EMH)

- Hypotéza efektivních trhů tvrdí, že ceny finančních aktiv již odrážejí všechny dostupné informace.
- Nikdo tedy nemůže dlouhodobě „přečhytračit trh“ pomocí veřejně známých informací.
- Podle úrovně informací rozlišujeme:

Hypotéza efektivních trhů (Efficient Market Hypothesis – EMH)

- Hypotéza efektivních trhů tvrdí, že ceny finančních aktiv již odrážejí všechny dostupné informace.
- Nikdo tedy nemůže dlouhodobě „přečhytračit trh“ pomocí veřejně známých informací.
- Podle úrovně informací rozlišujeme:
 - **Slabá forma:** ceny odrážejí všechny historické informace o cenách. ⇒ technická analýza nemůže přinést žádnou přidanou hodnotu.

Hypotéza efektivních trhů (Efficient Market Hypothesis – EMH)

- Hypotéza efektivních trhů tvrdí, že ceny finančních aktiv již odrážejí všechny dostupné informace.
- Nikdo tedy nemůže dlouhodobě „přečhytračit trh“ pomocí veřejně známých informací.
- Podle úrovně informací rozlišujeme:
 - **Slabá forma:** ceny odrážejí všechny historické informace o cenách. ⇒ technická analýza nemůže přinést žádnou přidanou hodnotu.
 - **Středně silná forma:** ceny odrážejí všechny veřejně dostupné informace (např. výroční zprávy, tiskové zprávy). ⇒ nefunguje ani technická ani fundamentální analýza.

Hypotéza efektivních trhů (Efficient Market Hypothesis – EMH)

- Hypotéza efektivních trhů tvrdí, že ceny finančních aktiv již odrážejí všechny dostupné informace.
- Nikdo tedy nemůže dlouhodobě „přečhytračit trh“ pomocí veřejně známých informací.
- Podle úrovně informací rozlišujeme:
 - **Slabá forma:** ceny odrážejí všechny historické informace o cenách. ⇒ technická analýza nemůže přinést žádnou přidanou hodnotu.
 - **Středně silná forma:** ceny odrážejí všechny veřejně dostupné informace (např. výroční zprávy, tiskové zprávy). ⇒ nefunguje ani technická ani fundamentální analýza.
 - **Silná forma:** ceny odrážejí i neveřejné (vnitřní) informace ⇒ nefunguje ani insider trading.

Hypotéza efektivních trhů (Efficient Market Hypothesis – EMH)

- Hypotéza efektivních trhů tvrdí, že ceny finančních aktiv již odrážejí všechny dostupné informace.
- Nikdo tedy nemůže dlouhodobě „přechytračit trh“ pomocí veřejně známých informací.
- Podle úrovně informací rozlišujeme:
 - **Slabá forma:** ceny odrážejí všechny historické informace o cenách. \Rightarrow technická analýza nemůže přinést žádnou přidanou hodnotu.
 - **Středně silná forma:** ceny odrážejí všechny veřejně dostupné informace (např. výroční zprávy, tiskové zprávy). \Rightarrow nefunguje ani technická ani fundamentální analýza.
 - **Silná forma:** ceny odrážejí i neveřejné (vnitřní) informace \Rightarrow nefunguje ani insider trading.

Proč by měla platit? Pokud by některá akcie byla pod(nad)hodnocená, její očekávaný výnos by byl vyšší(nižší) než spravedlivý \Rightarrow agenti by nakupovali(prodávali) \Rightarrow cena by vzrostla(klesla).

Hypotéza efektivních trhů (Efficient Market Hypothesis – EMH)

- Hypotéza efektivních trhů tvrdí, že ceny finančních aktiv již odrážejí všechny dostupné informace.
- Nikdo tedy nemůže dlouhodobě „přečhytračit trh“ pomocí veřejně známých informací.
- Podle úrovně informací rozlišujeme:
 - **Slabá forma:** ceny odrážejí všechny historické informace o cenách. ⇒ technická analýza nemůže přinést žádnou přidanou hodnotu.
 - **Středně silná forma:** ceny odrážejí všechny veřejně dostupné informace (např. výroční zprávy, tiskové zprávy). ⇒ nefunguje ani technická ani fundamentální analýza.
 - **Silná forma:** ceny odrážejí i neveřejné (vnitřní) informace ⇒ nefunguje ani insider trading.

Poznámka. Má se za to, že platí středně silná forma.

Zhruba řečeno: Tržní cena se vždy rovná skutečné ceně

Hypotéza efektivních trhů – formálně*

Zhruba řečeno: Tržní cena se vždy rovná skutečné ceně

V řeči stochastického modelování například takto:

$$\mathbb{E}\left(\frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{P_t} \mid \mathcal{F}_t\right) = \mu \Delta t$$

kde P_t je cena v čase t , μ je požadovaný (súravedlivý) růst, Δt je malý časový interval, $\mathbb{E}(\bullet \mid \mathcal{F})$ je podmíněná střední hodnota za podmínky inforace \mathcal{F} a \mathcal{F}_t je historie ceny (v případě slabé formy), historie veřejných informací (v případě středně silné formy), respektive historie všech informací.

Předpokládejme středně silnou formu EMH a uvažujme akcii malého pivovaru, od něž investoři předpokládají spravedlivý růst $\mu = 1\%$. Předpokládejme, že valná hromada rozhoduje o prodeji firmy velkému pivovaru, přičemž se předpokládá, že v případě schválení bude cena $P_2 = 106$, v případě neschválení pak $P_2 = 96$.

Předpokládejme středně silnou formu EMH a uvažujme akcii malého pivovaru, od něž investoři předpokládají spravedlivý růst $\mu = 1\%$. Předpokládejme, že valná hromada rozhoduje o prodeji firmy velkému pivovaru, přičemž se předpokládá, že v případě schválení bude cena $P_2 = 106$, v případě neschválení pak $P_2 = 96$. Z analýzy veřejných dat vyplývá, že schválení je stejně pravděpodobné jako neschválení. Na základě těchto znalostí se cena ustálila na $P_1 = 100$, protože

$$\mathbb{E}(P_2 | \text{veřejná data}) = 0,5 \cdot 96 + 0,5 \cdot 106 = 101$$

takže při očekávání růstu je 1% musí být $P_1 = 100$.

Předpokládejme středně silnou formu EMH a uvažujme akcii malého pivovaru, od něž investoři předpokládají spravedlivý růst $\mu = 1\%$. Předpokládejme, že valná hromada rozhoduje o prodeji firmy velkému pivovaru, přičemž se předpokládá, že v případě schválení bude cena $P_2 = 106$, v případě neschválení pak $P_2 = 96$. Z analýzy veřejných dat vyplývá, že schválení je stejně pravděpodobné jako neschválení. Na základě těchto znalostí se cena ustálila na $P_1 = 100$, protože

$$\mathbb{E}(P_2|\text{veřejná data}) = 0,5 \cdot 96 + 0,5 \cdot 106 = 101$$

takže při očekávání růstu je 1% musí být $P_1 = 100$. Pokud ale například některý manažer ví, že návrh bude schválen na 90%, bude

$$\mathbb{E}(P_2|\text{veřejná data} + \text{jeho informace}) = 0,9 \cdot 96 + 0,1 \cdot 106 = 105,$$

což by pro něj znamenalo nespravedlivý zisk 5%.

Předpokládejme středně silnou formu EMH a uvažujme akcii malého pivovaru, od něž investoři předpokládají spravedlivý růst $\mu = 1\%$. Předpokládejme, že valná hromada rozhoduje o prodeji firmy velkému pivovaru, přičemž se předpokládá, že v případě schválení bude cena $P_2 = 106$, v případě neschválení pak $P_2 = 96$. Z analýzy veřejných dat vyplývá, že schválení je stejně pravděpodobné jako neschválení. Na základě těchto znalostí se cena ustálila na $P_1 = 100$, protože

$$\mathbb{E}(P_2|\text{veřejná data}) = 0,5 \cdot 96 + 0,5 \cdot 106 = 101$$

takže při očekávání růstu je 1% musí být $P_1 = 100$. Pokud ale například některý manažer ví, že návrh bude schválen na 90%, bude

$$\mathbb{E}(P_2|\text{veřejná data} + \text{jeho informace}) = 0,9 \cdot 96 + 0,1 \cdot 106 = 105,$$

což by pro něj znamenalo nespravedlivý zisk 5%. (Pokud by platila silná EMH, svými nákupy by cenu „dotlačil“ až téměř ke 104.)

Poznámka: Z výše uvedených důvodů se v některých „citlivých“ časových úsecích ochodování s danou akcií zastavuje .

Poznámka: Z výše uvedených důvodů se v některých „citlivých“ časových úsecích ochodování s danou akcií zastavuje .

Poznámka:* EMH se velmi těžko testuje (vyvrácí), protože jde o takzvané spojené hypotézy

H1 Požadovaný růst je μ

H2 Platí EMH

Pokud něco svědčí proti výše uvedeným vztahům, není jasné, jestli je to kvůli neplatnosti H1 nebo H2.

- **Ex-dividend day** (den bez dividendy) je první den, kdy se akcie obchoduje bez nároku na vyhlášenou (již známou) dividendu.

Skok ceny při ex-dividend day

- **Ex-dividend day** (den bez dividendy) je první den, kdy se akcie obchoduje bez nároku na vyhlášenou (již známou) dividendu.
- Kdo akcii vlastní *v den před ex-dividend day*, má nárok na dividendu.

Skok ceny při ex-dividend day

- **Ex-dividend day** (den bez dividendy) je první den, kdy se akcie obchoduje bez nároku na vyhlášenou (již známou) dividendu.
- Kdo akcii vlastní *v den před ex-dividend day*, má nárok na dividendu.
- V den ex-dividend obvykle dojde k **poklesu ceny akcie** přibližně o výši vyplácené dividendy:

$$P_{\text{po}} \approx P_{\text{před}} - D,$$

kde D je výše dividendy na akcii.

Skok ceny při ex-dividend day

- **Ex-dividend day** (den bez dividendy) je první den, kdy se akcie obchoduje bez nároku na vyhlášenou (již známou) dividendu.
- Kdo akcii vlastní *v den před ex-dividend day*, má nárok na dividendu.
- V den ex-dividend obvykle dojde k **poklesu ceny akcie** přibližně o výši vyplácené dividendy:

$$P_{\text{po}} \approx P_{\text{před}} - D,$$

kde D je výše dividendy na akcii.

- Tento pokles odráží, že noví kupci již dividendu nezískají.

Skok ceny při ex-dividend day

- **Ex-dividend day** (den bez dividendy) je první den, kdy se akcie obchoduje bez nároku na vyhlášenou (již známou) dividendu.
- Kdo akcii vlastní *v den před ex-dividend day*, má nárok na dividendu.
- V den ex-dividend obvykle dojde k **poklesu ceny akcie** přibližně o výši vyplácené dividendy:

$$P_{\text{po}} \approx P_{\text{před}} - D,$$

kde D je výše dividendy na akcii.

- Tento pokles odráží, že noví kupci již dividendu nezískají.

Teoreticky: $PV_{\text{před}} \doteq D_1 + D_2v + \dots$, $PV_{\text{po}} = D_2v + \dots$, $PV_{\text{před}} - PV_{\text{po}} = D_1$

Skok ceny při ex-dividend day

- **Ex-dividend day** (den bez dividendy) je první den, kdy se akcie obchoduje bez nároku na vyhlášenou (již známou) dividendu.
- Kdo akcii vlastní *v den před ex-dividend day*, má nárok na dividendu.
- V den ex-dividend obvykle dojde k **poklesu ceny akcie** přibližně o výši vyplácené dividendy:

$$P_{\text{po}} \approx P_{\text{před}} - D,$$

kde D je výše dividendy na akcii.

- Tento pokles odráží, že noví kupci již dividendu nezískají.

Poznámka. V praxi není pokles ceny přesně roven dividendě — ovlivňují ho daně, tržní sentiment a likvidita.

Skok ceny při ex-dividend day

- **Ex-dividend day** (den bez dividendy) je první den, kdy se akcie obchoduje bez nároku na vyhlášenou (již známou) dividendu.
- Kdo akcii vlastní *v den před ex-dividend day*, má nárok na dividendu.
- V den ex-dividend obvykle dojde k **poklesu ceny akcie** přibližně o výši vyplácené dividendy:

$$P_{\text{po}} \approx P_{\text{před}} - D,$$

kde D je výše dividendy na akcii.

- Tento pokles odráží, že noví kupci již dividendu nezískají.

Aktuální údaje o výplatě dividend za rok 2024

ISIN Akcie	CZ0005112300
Dividenda na akcii	47 Kč
Rozhodnuto na valné hromadě svolané na den	23. června 2025
Rozhodný den pro výplatu dividendy	27. června 2025
Výplatní termín	1. srpna 2025 - 31. června

SKUPINA ČEZ



Standardní model ceny akcií*

Ve spojitém čase:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

kde P_t je cena akcie ve spojitém čase, t je čas ve dnech, W_t je Wienerův proces μ je trend (růst akcie) a σ je volatilita (měří riziko ceny).

Standardní model ceny akcií*

Ve spojitém čase:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

kde P_t je cena akcie ve spojitém čase, t je čas ve dnech, W_t je Wienerův proces μ je trend (růst akcie) a σ je volatilita (měří riziko ceny).

Řešení: $P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$.

Standardní model ceny akcií*

Ve spojitém čase:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

kde P_t je cena akcie ve spojitém čase, t je čas ve dnech, W_t je Wienerův proces μ je trend (růst akcie) a σ je volatilita (měří riziko ceny).

Řešení: $P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$.

$\Rightarrow \ln(P_t)$ má normální rozdělení s $\mathbb{E} \ln(P_t) = \ln(P_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ a $\text{var}(\ln(P_t)) = \sigma^2 t$.

Standardní model ceny akcií*

Ve spojitém čase:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

kde P_t je cena akcie ve spojitém čase, t je čas ve dnech, W_t je Wienerův proces μ je trend (růst akcie) a σ je volatilita (měří riziko ceny).

Řešení: $P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$.

$\Rightarrow \ln(P_t)$ má normální rozdělení s $\mathbb{E} \ln(P_t) = \ln(P_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ a $\text{var}(\ln(P_t)) = \sigma^2 t$.

Intuice:

- S $\sigma = 0$ (bez šumu) by rovnice měla řešení $P_t = P_0 \exp(\mu t)$ (tedy spojitě úročení!)

Standardní model ceny akcií*

Ve spojitém čase:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

kde P_t je cena akcie ve spojitém čase, t je čas ve dnech, W_t je Wienerův proces μ je trend (růst akcie) a σ je volatilita (měří riziko ceny).

Řešení: $P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$.

$\Rightarrow \ln(P_t)$ má normální rozdělení s $\mathbb{E} \ln(P_t) = \ln(P_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ a $\text{var}(\ln(P_t)) = \sigma^2 t$.

Intuice:

- S $\sigma = 0$ (bez šumu) by rovnice měla řešení $P_t = P_0 \exp(\mu t)$ (tedy spojitě úročení!)
- Kdyby W_t byla diferencovatelná, pak by řešení bylo $P_t = P_0 \exp(\mu t + \sigma W_t)$.

Standardní model ceny akcií*

Ve spojitém čase:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

kde P_t je cena akcie ve spojitém čase, t je čas ve dnech, W_t je Wienerův proces μ je trend (růst akcie) a σ je volatilita (měří riziko ceny).

Řešení: $P_t = P_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right)$.

$\Rightarrow \ln(P_t)$ má normální rozdělení s $\mathbb{E} \ln(P_t) = \ln(P_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t$ a $\text{var}(\ln(P_t)) = \sigma^2 t$.

Intuice:

- S $\sigma = 0$ (bez šumu) by rovnice měla řešení $P_t = P_0 \exp(\mu t)$ (tedy spojitě úročení!)
- Kdyby W_t byla diferencovatelná, pak by řešení bylo $P_t = P_0 \exp(\mu t + \sigma W_t)$.
- Dodatečný člen vzniká, protože W_t nemá konečnou variaci (viz obor *Stochastická analýza*)

Rovnice z předminulého slajdu:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

Pokud je čas ve dnech, σ se nazývá **denní volatilita**, pokud v rocích, pak **roční volatilita**.

- je rovna směrodatné odchylce log-ceny za jednotkový čas.

Rovnice z předminulého slajdu:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

Pokud je čas ve dnech, σ se nazývá **denní volatilita**, pokud v rocích, pak **roční volatilita**.

- je rovna směrodatné odchylce log-ceny za jednotkový čas.
- platí $\sigma_{roční} \doteq \sigma_{denní} \sqrt{252}$.

Rovnice z předminulého slajdu:

$$dP_t/P_t = \mu dt + \sigma dW_t$$

Pokud je čas ve dnech, σ se nazývá **denní volatilita**, pokud v rocích, pak **roční volatilita**.

- je rovna směrodatné odchylce log-ceny za jednotkový čas.
- platí $\sigma_{roční} \doteq \sigma_{denní} \sqrt{252}$.
- roční volatilita u akcí bývá mezi 0.15 a 0.45.

Stochastickou diferenciální rovnici aproximuje difereční

$$\frac{\Delta P_{t+1}}{P_t} = \mu + \sigma S_t \quad \Leftrightarrow \quad P_{t+1} = P_t(1 + \mu + \sigma S_t)$$

kde S_t je náhodná veličina nabývající ± 1 se stejnou pravděpodobností.

Aproximace (nejen) pro účely MFP

Stochastickou diferenciální rovnici aproximuje difereční

$$\frac{\Delta P_{t+1}}{P_t} = \mu + \sigma S_t \quad \Leftrightarrow \quad P_{t+1} = P_t(1 + \mu + \sigma S_t)$$

kde S_t je náhodná veličina nabývající ± 1 se stejnou pravděpodobností.

*Kontrola.** Zjistíme zda odpovídají $\mathbb{E}(\ln(P_1))$ a $\text{var}(\ln(P_1))$: Pomocí Taylorova rozvoje:

$$\ln(P_1) = \ln(P_0) + \ln(P_1/P_0) \doteq \ln(P_0) + \frac{\Delta P_1}{P_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta P_1}{P_0} \right)^2 \doteq \ln(P_0) + \frac{\Delta P_1}{P_0}$$

$$\mathbb{E}(\ln(P_1)) \doteq \ln(P_0) + [0.5(\mu + \sigma) + 0.5(\mu - \sigma)] - \frac{1}{2}(0.5(\mu + \sigma)^2 + 0.5(\mu - \sigma)^2)$$

$$= \ln(P_0) + \mu - \frac{1}{2}(\sigma^2 + \mu^2) \sim \text{odpovídá, protože bývá } \mu \ll \sigma$$

Aproximace (nejen) pro účely MFP

Stochastickou diferenciální rovnici aproximuje difereční

$$\frac{\Delta P_{t+1}}{P_t} = \mu + \sigma S_t \quad \Leftrightarrow \quad P_{t+1} = P_t(1 + \mu + \sigma S_t)$$

kde S_t je náhodná veličina nabývající ± 1 se stejnou pravděpodobností.

*Kontrola.** Zjistíme zda odpovídají $\mathbb{E}(\ln(P_1))$ a $\text{var}(\ln(P_1))$: Pomocí Taylorova rozvoje:

$$\ln(P_1) = \ln(P_0) + \ln(P_1/P_0) \doteq \ln(P_0) + \frac{\Delta P_1}{P_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta P_1}{P_0} \right)^2 \doteq \ln(P_0) + \frac{\Delta P_1}{P_0}$$

$$\text{var}(\ln(P_1)) \doteq \text{var}\left(\frac{\Delta P_1}{P_0}\right) = [0.5(\mu + \sigma)^2 + 0.5(\mu - \sigma)^2] - \mu^2 = \sigma^2 \text{ také odpovídá}$$

Příklad 5.7. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka ceny akcie v čase 2, když $P_0 = 100$, $\mu = 0.1\% = 0.001$ a volatilita je $1\% = 0.01$?

Příklad

Příklad 5.8. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka ceny akcie v čase 2, když $P_0 = 100$, $\mu = 0.1\% = 0.001$ a volatilita je $1\% = 0.01$?

Řešení. Máme čtyři možné scénáře vývoje náhodných veličin $S_1, S_2 \in \{-1, +1\}$ se stejnou pravděpodobností 0.25:

#	p	S_1	S_2	P_1	P_2	$pP_2 \doteq$	$pP_2^2 \doteq$
1	0.25	+1	+1	$100(1.001 + 0.01) = 101.1$	$101.1(1.001 + 0.01) = 102.2121$	25.55	2611.83
2	0.25	+1	-1	101.1	$101.1(1.001 - 0.01) = 100.1901$	25.05	2509.51
3	0.25	-1	+1	$100(1.001 - 0.01) = 99.1$	$99.1(1.001 + 0.01) = 100.1901$	25.05	2509.51
4	0.25	-1	-1	99.1	$99.1(1.001 - 0.01) = 98.2081$	24.55	2411.21
Součty:						100.20	10042.06

Příklad

Příklad 5.9. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka ceny akcie v čase 2, když $P_0 = 100$, $\mu = 0.1\% = 0.001$ a volatilita je $1\% = 0.01$?

Řešení. Máme čtyři možné scénáře vývoje náhodných veličin $S_1, S_2 \in \{-1, +1\}$ se stejnou pravděpodobností 0.25:

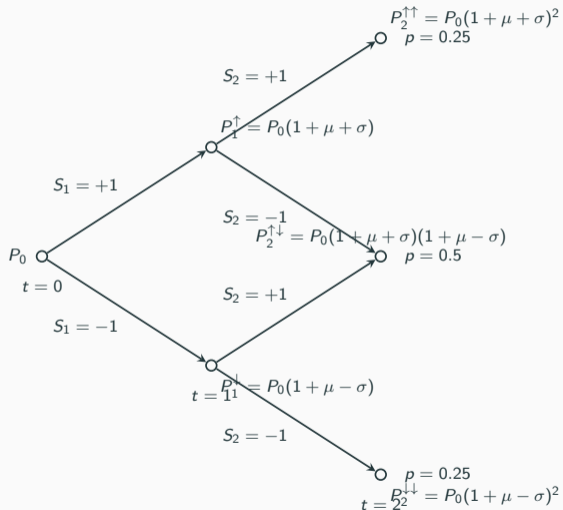
#	p	S_1	S_2	P_1	P_2	$pP_2 \doteq$	$pP_2^2 \doteq$
1	0.25	+1	+1	$100(1.001 + 0.01) = 101.1$	$101.1(1.001 + 0.01) = 102.2121$	25.55	2611.83
2	0.25	+1	-1	101.1	$101.1(1.001 - 0.01) = 100.1901$	25.05	2509.51
3	0.25	-1	+1	$100(1.001 - 0.01) = 99.1$	$99.1(1.001 + 0.01) = 100.1901$	25.05	2509.51
4	0.25	-1	-1	99.1	$99.1(1.001 - 0.01) = 98.2081$	24.55	2411.21
Součty:						100.20	10042.06

$$\mathbb{E}(P_2) \approx 100.20, \quad \leftarrow \text{růst } 0.2\%$$

$$\text{var}(P_2) = 10042.06 - (100.20)^2 \approx 2.00. \quad \leftarrow \text{součet rozptylů}$$

$$\sigma(P_2) = \sqrt{2.00} \approx 1.42$$

Příklad graficky



Jak vypadá v minulém příkladu rozdělení ceny P_n ?

Jak vypadá v minulém příkladu rozdělení ceny P_n ?

Může nastat 2^n možností, každá s prstí 2^{-n} . Jde-li v dané možnosti i -krát cena nahoru ($S = 1$) a $n - i$ krát dolů ($S = -1$), pak je cena P_n rovna

$$P_n = P_0 U^i L^{n-i}, \quad U = 1 + \mu + \sigma, \quad L = 1 + \mu - \sigma.$$

Počet takových možností je roven $k_i = \binom{n}{i}$. Takže

$$P_n = \left(100 \times U^i \times L^{n-i}, \binom{n}{i} \times 2^{-n} \right)_{i=0, \dots, n}$$

Příklad cena akcie

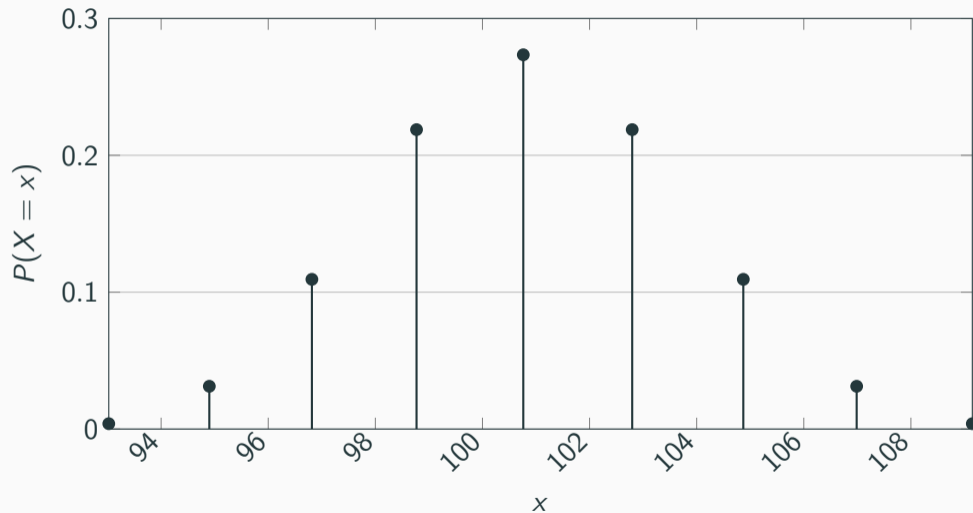
Příklad 5.10. Pro akcii z minulého případu určete rozdělení ceny P_8 , střední hodnotu, směrodatnou odchylku a $V@R_{0.95}$

Řešení. Máme $U = 1 + 0.001 + 0.01 = 1.011$, $L = 1 + 0.001 - 0.1 = 0.991$. Sestavíme obvyklou tabulku

k	$c_k = \binom{n}{k}$	$P_8(k) = U^k L^{n-k}$	$p_k = 2^{-n} c_k$	$p_k P_8$	$p_k P_8^2$
0	1	93.02	0.0039	0.36	33.75
1	8	94.9	0.0313	2.97	281.89
2	28	96.82	0.1094	10.59	1025.53
3	56	98.77	0.2188	21.61	2134.51
4	70	100.76	0.2734	27.55	2775.71
5	56	102.8	0.2188	22.49	2312.24
6	28	104.87	0.1094	11.47	1203.15
7	8	106.99	0.0313	3.35	358.29
8	1	109.15	0.0039	0.43	46.46
Σ	256		1	100.82	10171.53

Máme tedy $\mathbb{E}P_8 \approx 100.82$ (opět \pm součet přírůstků), $\sigma(P_8) \approx 2.62$.

Graf prabděpodobnosti rozdělní (PMF)



Začíná připomínat normální rozdělení.

Transakční náklady u cenných papírů

Při nákupu a prodeji cenných papírů nevstupujeme do obchodu za „jednu cenu“, ale čelíme **transakčním nákladům**, které snižují náš čistý výnos.

Transakční náklady u cenných papírů

Při nákupu a prodeji cenných papírů nevstupujeme do obchodu za „jednu cenu“, ale čelíme **transakčním nákladům**, které snižují náš čistý výnos.

Bid–ask spread

- **Bid** = cena, za kterou jsou ostatní ochotni nakoupit (my prodáváme).
- **Ask** = cena, za kterou jsou ostatní ochotni prodat (my nakupujeme).
- **Spread** = $\text{ask} - \text{bid} > 0$ je implicitní náklad:
 - nakoupíme za ask (draze),
 - prodáme za bid (levněji),
 - i při okamžitém prodeji realizujeme ztrátu ve výši spreadu.
- **Střední (midpoint) cena** = $\frac{\text{ask} + \text{bid}}{2}$

Transakční náklady u cenných papírů

Při nákupu a prodeji cenných papírů nevstupujeme do obchodu za „jednu cenu“, ale čelíme **transakčním nákladům**, které snižují náš čistý výnos.

Bid–ask spread

- **Bid** = cena, za kterou jsou ostatní ochotni nakoupit (my prodáváme).
- **Ask** = cena, za kterou jsou ostatní ochotni prodat (my nakupujeme).
- **Spread** = $\text{ask} - \text{bid} > 0$ je implicitní náklad:
 - nakoupíme za ask (draze),
 - prodáme za bid (levněji),
 - i při okamžitém prodeji realizujeme ztrátu ve výši spreadu.
- **Střední (midpoint) cena** = $\frac{\text{ask} + \text{bid}}{2}$

Poplatky brokerům: Zejména **procentní poplatek** z objemu obchodu (např. 0.1% z hodnoty transakce).

Příklad – transakční náklady

Příklad 5.11. Nechť se střední cena P akcie řídí standardním modelem s $\mu = 0.001$ a $\sigma = 0.01$, nechť $P_0 = 100$, nechť je spread $S = 0.2$ a poplatek za transakci 0.1% z obchodovaného objemu. Nakupujeme jednu akcii v čase 0 a prodáváme v čase 2, jaká je střední hodnota výsledku našeho obchodování?

Příklad – transakční náklady

Příklad 5.12. Nechť se střední cena P akcie řídí standardním modelem s $\mu = 0.001$ a $\sigma = 0.01$, nechť $P_0 = 100$, nechť je spread $S = 0.2$ a poplatek za transakci 0.1% z obchodovaného objemu. Nakupujeme jednu akcii v čase 0 a prodáváme v čase 2, jaká je střední hodnota výsledku našeho obchodování?

Řešení.

Vývoj střední ceny P_t je stejný jako v předposledním příkladu.

Nákup v čase 0: $ask_0 = P_0 + \frac{S}{2} = 100 + 0.1 = 100.1$, poplatek $= 0.001 \cdot 100.1 = 0.1001$
 \Rightarrow celkový výdaj $= 100.1 + 0.1001 \doteq 100.20$.

Příklad – transakční náklady

Řešení.

Vývoj střední ceny P_t je stejný jako v předposledním příkladu.

Nákup v čase 0: $\text{ask}_0 = P_0 + \frac{S}{2} = 100 + 0.1 = 100.1$, poplatek = $0.001 \cdot 100.1 = 0.1001$
 \Rightarrow celkový výdaj = $100.1 + 0.1001 \doteq 100.20$.

Prodej v čase 2: v každém scénáři: $\text{bid}_2 = P_2 - \frac{S}{2} = P_2 - 0.1$, poplatek = $0.001 \cdot \text{bid}_2$,
 \Rightarrow inkaso = $\text{bid}_2 \cdot (1 - 0.001) = (P_2 - 0.1) \cdot 0.999$.

Výsledek obchodování: $G = \text{inkaso} - 100.20$

#	p	S_1	S_2	P_1	P_2	inkaso	G	pG	pG^2
1	0.25	+1	+1	101.1	102.2121	102.01	+1.81	0.45	0.82
2	0.25	+1	-1	101.1	100.1901	99.99	-0.21	-0.05	0.01
3	0.25	-1	+1	99.1	100.1901	99.99	-0.21	-0.05	0.01
4	0.25	-1	-1	99.1	98.2081	98.01	-2.19	-0.55	1.20
Součty:								-0.20	2.04

Příklad – transakční náklady

Řešení.

Vývoj střední ceny P_t je stejný jako v předposledním příkladu.

Nákup v čase 0: $\text{ask}_0 = P_0 + \frac{S}{2} = 100 + 0.1 = 100.1$, poplatek = $0.001 \cdot 100.1 = 0.1001$
 \Rightarrow celkový výdaj = $100.1 + 0.1001 \doteq 100.20$.

Prodej v čase 2: v každém scénáři: $\text{bid}_2 = P_2 - \frac{S}{2} = P_2 - 0.1$, poplatek = $0.001 \cdot \text{bid}_2$,
 \Rightarrow inkaso = $\text{bid}_2 \cdot (1 - 0.001) = (P_2 - 0.1) \cdot 0.999$.

Výsledek obchodování: $G = \text{inkaso} - 100.20$

#	p	S_1	S_2	P_1	P_2	inkaso	G	pG	pG^2
1	0.25	+1	+1	101.1	102.2121	102.01	+1.81	0.45	0.82
2	0.25	+1	-1	101.1	100.1901	99.99	-0.21	-0.05	0.01
3	0.25	-1	+1	99.1	100.1901	99.99	-0.21	-0.05	0.01
4	0.25	-1	-1	99.1	98.2081	98.01	-2.19	-0.55	1.20
Součty:								-0.20	2.04

Výsledek: $\mathbb{E}(G) \approx -0.20$, $\text{var}(G) \approx 2.04 - (-0.20)^2 \approx 2.00$, $\sigma(G) \approx \sqrt{2.00} \approx 1.41$.

Příklad – transakční náklady

Řešení.

Vývoj střední ceny P_t je stejný jako v předposledním příkladu.

Nákup v čase 0: $\text{ask}_0 = P_0 + \frac{S}{2} = 100 + 0.1 = 100.1$, poplatek = $0.001 \cdot 100.1 = 0.1001$
 \Rightarrow celkový výdaj = $100.1 + 0.1001 \doteq 100.20$.

Prodej v čase 2: v každém scénáři: $\text{bid}_2 = P_2 - \frac{S}{2} = P_2 - 0.1$, poplatek = $0.001 \cdot \text{bid}_2$,
 \Rightarrow inkaso = $\text{bid}_2 \cdot (1 - 0.001) = (P_2 - 0.1) \cdot 0.999$.

Výsledek obchodování: $G = \text{inkaso} - 100.20$

#	p	S_1	S_2	P_1	P_2	inkaso	G	pG	pG^2
1	0.25	+1	+1	101.1	102.2121	102.01	+1.81	0.45	0.82
2	0.25	+1	-1	101.1	100.1901	99.99	-0.21	-0.05	0.01
3	0.25	-1	+1	99.1	100.1901	99.99	-0.21	-0.05	0.01
4	0.25	-1	-1	99.1	98.2081	98.01	-2.19	-0.55	1.20
Součty:								-0.20	2.04

Výsledek: $\mathbb{E}(G) \approx -0.20$, $\text{var}(G) \approx 2.04 - (-0.20)^2 \approx 2.00$, $\sigma(G) \approx \sqrt{2.00} \approx 1.41$.

Bez trans. nákladů (předp. příklad): $\mathbb{E}(G) \approx 0.20$, $\sigma(G) \approx 1.41$.

Míry rizika

- Dosud jsme riziko kvantifikovali hlavně směrodatnou odchylkou, ta však

- Dosud jsme riziko kvantifikovali hlavně směrodatnou odchylkou, ta však
 - penalizuje výchyly na obě strany od průměru (nám ale vadí jen levá strana = ztráty)

- Dosud jsme riziko kvantifikovali hlavně směrodatnou odchylkou, ta však
 - penalizuje výchyly na obě strany od průměru (nám ale vadí jen levá strana = ztráty)
 - často nefunguje ve své intuitivní interpretaci (střední odchylka od průměru).

- Dosud jsme riziko kvantifikovali hlavně směrodatnou odchylkou, ta však
 - penalizuje výchyly na obě strany od průměru (nám ale vadí jen levá strana = ztráty)
 - často nefunguje ve své intuitivní interpretaci (střední odchylka od průměru).
*Příklad: investice X nám s prstí 99% přinese zisk 1000 , s prstí 1% nezískáme nic.
 $\mathbb{E}X = 990$, $\sigma(X) \doteq 99.5$. "Střední odchylka" vzhůru $\mathbb{E}X + \sigma(X) = 1089,5$ přitom nikdy nemůže nastat ani zdaleka.*

- Dosud jsme riziko kvantifikovali hlavně směrodatnou odchylkou, ta však
 - penalizuje výchyly na obě strany od průměru (nám ale vadí jen levá strana = ztráty)
 - často nefunguje ve své intuitivní interpretaci (střední odchylka od průměru).
*Příklad: investice X nám s prstí 99% přinese zisk 1000 , s prstí 1% nezískáme nic.
 $\mathbb{E}X = 990$, $\sigma(X) \doteq 99.5$. "Střední odchylka" vzhůru $\mathbb{E}X + \sigma(X) = 1089,5$ přitom nikdy nemůže nastat ani zdaleka.*

⇒ potřebujeme jinou míru rizika.

Hodnota v riziku (Value at Risk, VaR, V@R)

Aplikuje se na ztráty, určena parametrem α , nazývaným **hladinou**

Hodnota v riziku (Value at Risk, VaR, V@R)

Aplikuje se na ztráty, určena parametrem α , nazývaným **hladinou**

Neformálně: Nejmenší hodnota ztráty, která bude překročena a pravděpodobností $\geq \alpha$.

(Tj. na α procent nebo více naše ztráta bude menší nebo rovna.)

Hodnota v riziku (Value at Risk, VaR, V@R)

Aplikuje se na ztráty, určena parametrem α , nazývaným **hladinou**

Neformálně: Nejmenší hodnota ztráty, která bude překročena a pravděpodobností $\geq \alpha$.
(Tj. na α procent nebo více naše ztráta bude menší nebo rovna.)

*Formálně**: Nechť L je náhodná ztráta. Pak

$$\text{V@R}_\alpha(L) = \min\{x : \mathbb{P}[L \leq x] \geq \alpha\}$$

(v teorii pravděpodobnosti se této hodnotě říká **kvantil**, viz pozdější studium)

Hodnota v riziku (Value at Risk, VaR, V@R)

Aplikuje se na ztráty, určena parametrem α , nazývaným **hladinou**

Neformálně: Nejmenší hodnota ztráty, která bude překročena a pravděpodobností $\geq \alpha$.
(Tj. na α procent nebo více naše ztráta bude menší nebo rovna.)

*Formálně**: Nechť L je náhodná ztráta. Pak

$$V@R_{\alpha}(L) = \min\{x : \mathbb{P}[L \leq x] \geq \alpha\}$$

(v teorii pravděpodobnosti se této hodnotě říká **kvantil**, viz pozdější studium)

Pro potřeby MFP: Nechť $L = (y_i, p_i)_{i \leq n}$ je ztráta (y_i jsou hodnoty, p_i pravděpodobnosti). Předpokládejme $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Pak se $V@R_{\alpha}(L)$ vypočítá jako nejmenší hodnota y_i taková že $F_i := \sum_{j=1}^i p_j \geq \alpha$.

Hodnota v riziku (Value at Risk, VaR, V@R)

Aplikuje se na ztráty, určena parametrem α , nazývaným **hladinou**

Neformálně: Nejmenší hodnota ztráty, která bude překročena a pravděpodobností $\geq \alpha$.
(Tj. na α procent nebo více naše ztráta bude menší nebo rovna.)

Formálně:* Nechť L je náhodná ztráta. Pak

$$V@R_{\alpha}(L) = \min\{x : \mathbb{P}[L \leq x] \geq \alpha\}$$

(v teorii pravděpodobnosti se této hodnotě říká **kvantil**, viz pozdější studium)

Pro potřeby MFP: Nechť $L = (y_i, p_i)_{i \leq n}$ je ztráta (y_i jsou hodnoty, p_i čísla pravděpodobnosti). Předpokládejme $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Pak se $V@R_{\alpha}(L)$ vypočítá jako nejmenší hodnota y_i taková že $F_i := \sum_{j=1}^i p_j \geq \alpha$.

Prakticky: Pokud $\alpha \geq 0.5$ je vhodnější počítat $F_i = 1 - \sum_{j=i+1}^n p_j$.

Hodnota v riziku (Value at Risk, VaR, V@R)

Aplikuje se na ztráty, určena parametrem α , nazývaným **hladinou**

Neformálně: Nejmenší hodnota ztráty, která bude překročena a pravděpodobností $\geq \alpha$.
(Tj. na α procent nebo více naše ztráta bude menší nebo rovna.)

Formálně:* Nechť L je náhodná ztráta. Pak

$$V@R_{\alpha}(L) = \min\{x : \mathbb{P}[L \leq x] \geq \alpha\}$$

(v teorii pravděpodobnosti se této hodnotě říká **kvantil**, viz pozdější studium)

Pro potřeby MFP: Nechť $L = (y_i, p_i)_{i \leq n}$ je ztráta (y_i ny jsou hodnoty, p_i čka pravděpodobnosti). Předpokládejme $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Pak se $V@R_{\alpha}(L)$ vypočítá jako nejmenší hodnota y_i taková že $F_i := \sum_{j=1}^i p_j \geq \alpha$.

Prakticky: Pokud $\alpha \geq 0.5$ je vhodnější počítat $F_i = 1 - \sum_{j=i+1}^n p_j$.

Poznámka V@R je v praxi hojně využíván (například regulace BASEL II+)

Příklad 6.1. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000.

Vypočtete $V@R_{0.9}(L)$ a $V@R_{0.95}(L)$

Příklad 6.3. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000.

Vypočtete $V@R_{0.9}(L)$ a $V@R_{0.95}(L)$

Řešení. Postupujeme shora a postupně dostáváme $F_5 = 1$, $F_4 = 0.96$, $F_3 = 0.93$ a $F_2 = 0.9$ a $F_1 = 0.8$. Nejmenší index i , pro který je $F_i \geq 0.9$, je $i = 2$, takže $V@R_{0.9}(L) = y_2 = 50$. Podobně zjistíme, že $V@R_{0.95}(L) = y_4 = 200$.

Příklad 6.5. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtete $V@R_{0.9}(L)$ a $V@R_{0.95}(L)$

Řešení. Postupujeme shora a postupně dostáváme $F_5 = 1$, $F_4 = 0.96$, $F_3 = 0.93$ a $F_2 = 0.9$ a $F_1 = 0.8$. Nejmenší index i , pro který je $F_i \geq 0.9$, je $i = 2$, takže $V@R_{0.9}(L) = y_2 = 50$. Podobně zjistíme, že $V@R_{0.95}(L) = y_4 = 200$.

Poznámka: Můžeme si ověřit, že V@R je skutečně horní hranicí ztráty $\mathbb{P}[L \leq V@R_{0.95}(L)] = 0.96 > 0.95$, $\mathbb{P}[L \leq V@R_{0.9}(L)] = 0.9$.

Příklad 6.7. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtete $V@R_{0.9}(L)$ a $V@R_{0.95}(L)$

Řešení. Postupujeme shora a postupně dostáváme $F_5 = 1$, $F_4 = 0.96$, $F_3 = 0.93$ a $F_2 = 0.9$ a $F_1 = 0.8$. Nejmenší index i , pro který je $F_i \geq 0.9$, je $i = 2$, takže $V@R_{0.9}(L) = y_2 = 50$. Podobně zjistíme, že $V@R_{0.95}(L) = y_4 = 200$.

Poznámka: Můžeme si ověřit, že V@R je skutečně horní hranicí ztráty $\mathbb{P}[L \leq V@R_{0.95}(L)] = 0.96 > 0.95$, $\mathbb{P}[L \leq V@R_{0.9}(L)] = 0.9$.

Příklad 6.8. Ztráta nabývá 100 možných hodnot, každá nastává se stejnou pravděpodobností. Které z nich je rovno $V@R_{0.95}$?

Příklad 6.9. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtete $V@R_{0.9}(L)$ a $V@R_{0.95}(L)$

Řešení. Postupujeme shora a postupně dostáváme $F_5 = 1$, $F_4 = 0.96$, $F_3 = 0.93$ a $F_2 = 0.9$ a $F_1 = 0.8$. Nejmenší index i , pro který je $F_i \geq 0.9$, je $i = 2$, takže $V@R_{0.9}(L) = y_2 = 50$. Podobně zjistíme, že $V@R_{0.95}(L) = y_4 = 200$.

Poznámka: Můžeme si ověřit, že $V@R$ je skutečně horní hranicí ztráty $\mathbb{P}[L \leq V@R_{0.95}(L)] = 0.96 > 0.95$, $\mathbb{P}[L \leq V@R_{0.9}(L)] = 0.9$.

Příklad 6.10. Ztráta nabývá 100 možných hodnot, každá nastává se stejnou pravděpodobností. Které z nich je rovno $V@R_{0.95}$?

Řešení. Máme $F_i = i/100$, je to tedy hodnota s indexem 95, tedy 95tá nejnižší (či šestá nejvyšší).

Pokud označuje X příjem, nikoli ztrátu, pak hodnotu v rizku můžeme počítat jako $V@R^+ = -V@R(-X)$.

Pokud označuje X příjem, nikoli ztrátu, pak hodnotu v rizku můžeme počítat jako $V@R^+ = -V@R(-X)$.

V praxi postupujeme méně komplikovaně: postupujeme „z druhé strany“. Počítáme $G_i = \sum_{k=1}^{i-1} -V@R^+$ bude odpovídat poslednímu index, který bude menší nebo roven $1 - \alpha$.

Pokud označuje X příjem, nikoli ztrátu, pak hodnotu v riziku můžeme počítat jako $V@R^+ = -V@R(-X)$.

V praxi postupujeme méně komplikovaně: postupujeme „z druhé strany“. Počítáme $G_i = \sum_{k=1}^{i-1} -V@R^+$ bude odpovídat poslednímu index, který bude menší nebo roven $1 - \alpha$.

Příklad 6.13. Zisk z podnikání je 500 tisíc s pravděpodobností 80%, 200 tisíc s pravděpodobností 10%, 100 tisíc s pravděpodobností 9% a 0 s pravděpodobností 1%. Jaká je hodnota v riziku na hladině 0.95?

Pokud označuje X příjem, nikoli ztrátu, pak hodnotu v riziku můžeme počítat jako $V@R^+ = -V@R(-X)$.

V praxi postupujeme méně komplikovaně: postupujeme „z druhé strany“. Počítáme $G_i = \sum_{k=1}^{i-1} -V@R^+$ bude odpovídat poslednímu index, který bude menší nebo roven $1 - \alpha$.

Příklad 6.14. Zisk z podnikání je 500 tisíc s pravděpodobností 80%, 200 tisíc s pravděpodobností 10%, 100 tisíc s pravděpodobností 9% a 0 s pravděpodobností 1%. Jaká je hodnota v riziku na hladině 0.95?

Řešení. Postupujeme od nejmenších hodnot: $G_1 = 0$ (odpovídající zisku 0), $G_2 = 0.01$ (odp. 100), $G_3 = 0.1$: protože $G_3 > 1 - 0.95 = 0.05$, nemusíme dále počítat: hledanou hodnotou bude druhá nejmenší hodnota, tedy 100 tisíc.

Podmíněná hodnota v riziku

Motivace: V@R je sice „jednostranná“ míra rizika, ale nezohledňuje „co se děje nad ním“.

Podmíněná hodnota v riziku

Motivace: V@R je sice „jednostranná“ míra rizika, ale nezohledňuje „co se děje nad ním“.

Toto „napravuje“ **podmíněná hodnota v riziku** (Conditional Value at Risk). Též se aplikuje na ztráty a též je parametrizována hladinou α .

Podmíněná hodnota v riziku

Motivace: VaR je sice „jednostranná“ míra rizika, ale nezohledňuje „co se děje nad ním“.

Toto „napravuje“ **podmíněná hodnota v riziku** (Conditional Value at Risk). Též se aplikuje na ztráty a též je parametrizována hladinou α .

Neformálně: Průměr z $1 - \alpha$ procent nejhorších případů.

Podmíněná hodnota v riziku

Motivace: $V@R$ je sice „jednostranná“ míra rizika, ale nezohledňuje „co se děje nad ním“.

Toto „napravuje“ **podmíněná hodnota v riziku** (Conditional Value at Risk). Též se aplikuje na ztráty a též je parametrizována hladinou α .

Neformálně: Průměr z $1 - \alpha$ procent nejhorších případů.

Pro potřeby MFP: Necht $L = (y_i, p_i)_{i \leq n}$ je ztráta (y_i jsou hodnoty, p_i čísla pravděpodobnosti). Předpokládejme $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Označme $F_i := \sum_{j=1}^i p_j$. Necht k je nejmenší index takový, že $F_k \geq \alpha$. Potom

$$CV@R_{\alpha}(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \left[(F_k - \alpha) y_k + \sum_{i=k+1}^n p_i y_i \right].$$

Podmíněná hodnota v riziku

Motivace: $V@R$ je sice „jednostranná“ míra rizika, ale nezohledňuje „co se děje nad ním“.

Toto „napravuje“ **podmíněná hodnota v riziku** (Conditional Value at Risk). Též se aplikuje na ztráty a též je parametrizována hladinou α .

Neformálně: Průměr z $1 - \alpha$ procent nejhorších případů.

Pro potřeby MFP: Necht $L = (y_i, p_i)_{i \leq n}$ je ztráta (y_i jsou hodnoty, p_i čka pravděpodobnosti). Předpokládejme $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Označme $F_i := \sum_{j=1}^i p_j$. Necht k je nejmenší index takový, že $F_k \geq \alpha$. Potom

$$CV@R_\alpha(L) = \frac{1}{1 - \alpha} \left[(F_k - \alpha) y_k + \sum_{i=k+1}^n p_i y_i \right].$$

Intuice: První váhu zmenšujeme aby váhy „v čitateli“ daly $(1 - \alpha)$.

Příklad 6.15. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtěte $CV@R_{0.9}(L)$ a $CV@R_{0.95}(L)$.

Příklad 6.16. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtěte $CV@R_{0.9}(L)$ a $CV@R_{0.95}(L)$.

Řešení. Z předchozího výpočtu máme kumulativní pravděpodobnosti:

$$F_1 = 0.8, F_2 = 0.9, F_3 = 0.93, F_4 = 0.96, F_5 = 1.$$

Příklad 6.17. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtete $CV@R_{0.9}(L)$ a $CV@R_{0.95}(L)$.

Řešení. Z předchozího výpočtu máme kumulativní pravděpodobnosti:

$$F_1 = 0.8, F_2 = 0.9, F_3 = 0.93, F_4 = 0.96, F_5 = 1.$$

Pro $\alpha = 0.9$: k (první index, kde $F_k \geq 0.9$) je $k = 2$. Podle definice:

$$CV@R_{0.9}(L) = \frac{1}{1-0.9} \left[(F_2 - 0.9)y_2 + \sum_{i=3}^5 p_i y_i \right].$$

Příklad 6.18. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtete $CV@R_{0.9}(L)$ a $CV@R_{0.95}(L)$.

Řešení. Z předchozího výpočtu máme kumulativní pravděpodobnosti:

$$F_1 = 0.8, F_2 = 0.9, F_3 = 0.93, F_4 = 0.96, F_5 = 1.$$

Pro $\alpha = 0.9$: k (první index, kde $F_k \geq 0.9$) je $k = 2$. Podle definice:

$$CV@R_{0.9}(L) = \frac{1}{1-0.9} \left[(F_2 - 0.9)y_2 + \sum_{i=3}^5 p_i y_i \right]. \text{ Dosadíme: } CV@R_{0.9}(L) = \\ 10 [(0.9 - 0.9) \cdot 50 + 0.03 \cdot 100 + 0.03 \cdot 200 + 0.04 \cdot 1000] = 10(0 + 3 + 6 + 40) = 490. \text{ Tedy} \\ CV@R_{0.9}(L) = 490.$$

Příklad 6.19. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtěte $CV@R_{0.9}(L)$ a $CV@R_{0.95}(L)$.

Řešení. Z předchozího výpočtu máme kumulativní pravděpodobnosti:

$$F_1 = 0.8, F_2 = 0.9, F_3 = 0.93, F_4 = 0.96, F_5 = 1.$$

Pro $\alpha = 0.9$: k (první index, kde $F_k \geq 0.9$) je $k = 2$. Podle definice:

$$CV@R_{0.9}(L) = \frac{1}{1-0.9} \left[(F_2 - 0.9)y_2 + \sum_{i=3}^5 p_i y_i \right]. \text{ Dosadíme: } CV@R_{0.9}(L) = \\ 10 [(0.9 - 0.9) \cdot 50 + 0.03 \cdot 100 + 0.03 \cdot 200 + 0.04 \cdot 1000] = 10(0 + 3 + 6 + 40) = 490. \text{ Tedy } \\ CV@R_{0.9}(L) = 490.$$

$$\text{Pro } \alpha = 0.95: k = 4, \text{ tedy } CV@R_{0.95}(L) = \frac{1}{1-0.95} \left[(F_4 - 0.95)y_4 + \sum_{i=5}^5 p_i y_i \right] = \\ 20 [(0.96 - 0.95) \cdot 200 + 0.04 \cdot 1000] = 20(2 + 40) = 840.$$

Příklad 6.20. S pravděpodobností 80% bude naše ztráta L nulová, s prstí 10% ztratíme 50, s prstí 3% bude ztráta činit 100, s prstí 3% bude 200, s prstí 4% to bude 1000. Vypočtěte $CV@R_{0.9}(L)$ a $CV@R_{0.95}(L)$.

Řešení. Z předchozího výpočtu máme kumulativní pravděpodobnosti:

$$F_1 = 0.8, F_2 = 0.9, F_3 = 0.93, F_4 = 0.96, F_5 = 1.$$

Pro $\alpha = 0.9$: k (první index, kde $F_k \geq 0.9$) je $k = 2$. Podle definice:

$$CV@R_{0.9}(L) = \frac{1}{1-0.9} \left[(F_2 - 0.9)y_2 + \sum_{i=3}^5 p_i y_i \right]. \text{ Dosadíme: } CV@R_{0.9}(L) = \\ 10 [(0.9 - 0.9) \cdot 50 + 0.03 \cdot 100 + 0.03 \cdot 200 + 0.04 \cdot 1000] = 10(0 + 3 + 6 + 40) = 490. \text{ Tedy } \\ CV@R_{0.9}(L) = 490.$$

$$\text{Pro } \alpha = 0.95: k = 4, \text{ tedy } CV@R_{0.95}(L) = \frac{1}{1-0.95} \left[(F_4 - 0.95)y_4 + \sum_{i=5}^5 p_i y_i \right] = \\ 20 [(0.96 - 0.95) \cdot 200 + 0.04 \cdot 1000] = 20(2 + 40) = 840.$$

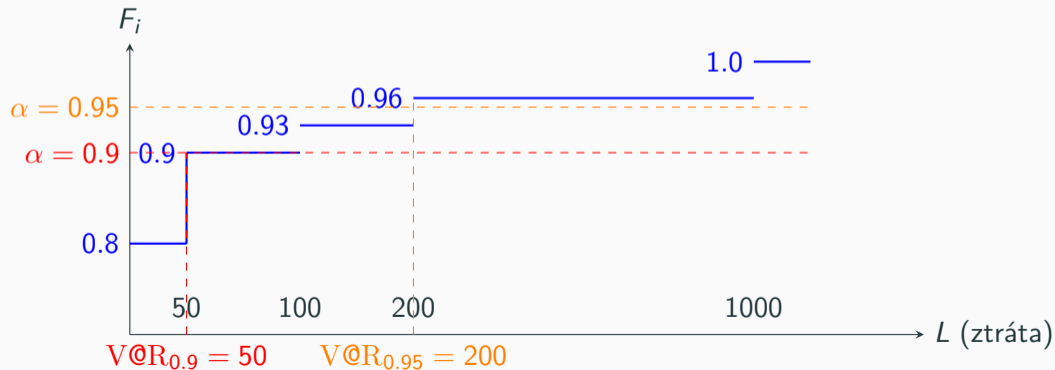
Poznámka: Vidíme, že $CV@R$ lépe zohlednil „extrémní“ ztrátu 1000 ($V@R_{0.9} = 50, V@R_{0.95} = 200$).

Příklad - ilustrace

Vážíme váhami „nad hladinou“:

$$CV@R_{0.90} : 0.03 + 0.03 + 0.04 = 0.1 = (1 - 0.9),$$

$$CV@R_{0.95} : 0.01 + 0.04 = 0.05 = (1 - 0.95).$$



Pokud označuje X **příjem** (nikoli ztrátu), pak podmíněnou hodnotu v riziku můžeme počítat jako

$$\text{CV@R}_\alpha^+(X) = -\text{CV@R}_\alpha(-X).$$

Pokud označuje X **příjem** (nikoli ztrátu), pak podmíněnou hodnotu v riziku můžeme počítat jako

$$\text{CV@R}_\alpha^+(X) = -\text{CV@R}_\alpha(-X).$$

V praxi postupujeme obdobně jako u CV@R, jen „z druhé strany“: průměrujeme **nejhorších** $(1 - \alpha)100\%$ výsledků příjmu, tj. zleva (od nejnižších hodnot). Pro diskrétní rozdělení $X = (y_i, p_i)$ seřazené vzestupně ($y_1 < \dots < y_n$), s $G_i = \sum_{j=1}^{i-1} p_j$, nechtě k je nejvyšší index s $G_k \leq 1 - \alpha$. Potom

$$\text{CV@R}_\alpha^+(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \left[\sum_{i=1}^{k-1} p_i y_i + ((1 - \alpha) - G_{k-1}) y_k \right].$$

Příklad 6.21. Zisk z podnikání je 500 tisíc s pravděpodobností 80%, 200 tisíc s pr. 10%, 100 tisíc s pr. 9% a 0 s pr. 1%. Jaká je $CV@R^+$ na hladině 0.95?

Příklad 6.22. Zisk z podnikání je 500 tisíc s pravděpodobností 80%, 200 tisíc s pr. 10%, 100 tisíc s pr. 9% a 0 s pr. 1%. Jaká je $CV@R^+$ na hladině 0.95?

Řešení. Seřadíme zisky vzestupně: 0 (0.01), 100 (0.09), 200 (0.10), 500 (0.80).
Sčítáme zleva: $G_1 = 0$, $G_2 = 0.01$, $G_3 = 0.10$, $G_4 = 0.2$. Pro $\alpha = 0.95$ je $1 - \alpha = 0.05$.
Největší k s $G_k \leq 0.05$ je $k = 2$. Použijeme vzorec:

$$CV@R_{0.95}^+(X) = \frac{1}{0.05} \left[0.01 \cdot 0 + (0.05 - 0.01) \cdot 100 \right] = 20 \cdot 4 = \boxed{80 \text{ tisíc}}.$$

(Pro srovnání z předchozího snímku: $V@R_{0.95}^+(X) = 100$ tisíc.)

Koherentní míry rizika

Nechť L je náhodná ztráta. Míra rizika je zobrazení $\rho(L) \in \mathbb{R}$.

Koherentní míry rizika

Nechť L je náhodná ztráta. Míra rizika je zobrazení $\rho(L) \in \mathbb{R}$.

Motivace: Další pokus o „rozumné“ kritérium výběru náhodné ztráty.

Nechť L je náhodná ztráta. Míra rizika je zobrazení $\rho(L) \in \mathbb{R}$.

Motivace: Další pokus o „rozumné“ kritérium výběru náhodné ztráty.

Definice. Míra rizika ρ se nazývá **koherentní**, pokud pro všechna rizika L_1, L_2 a $a \geq 0$ platí:

1. **Monotonicita:** Pokud $L_1 \leq L_2$ (ve všech scénářích), pak $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.

Koherentní míry rizika

Nechť L je náhodná ztráta. Míra rizika je zobrazení $\rho(L) \in \mathbb{R}$.

Motivace: Další pokus o „rozumné“ kritérium výběru náhodné ztráty.

Definice. Míra rizika ρ se nazývá **koherentní**, pokud pro všechna rizika L_1, L_2 a $a \geq 0$ platí:

1. **Monotonicita:** Pokud $L_1 \leq L_2$ (ve všech scénářích), pak $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.
2. **Translační invariance:** Pro každé $m \in \mathbb{R}$ platí $\rho(L + m) = \rho(L) + m$. (Přidání jisté ztráty m zvýší riziko o m .)

Koherentní míry rizika

Nechť L je náhodná ztráta. Míra rizika je zobrazení $\rho(L) \in \mathbb{R}$.

Motivace: Další pokus o „rozumné“ kritérium výběru náhodné ztráty.

Definice. Míra rizika ρ se nazývá **koherentní**, pokud pro všechna rizika L_1, L_2 a $a \geq 0$ platí:

1. **Monotonicita:** Pokud $L_1 \leq L_2$ (ve všech scénářích), pak $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.
2. **Translační invariance:** Pro každé $m \in \mathbb{R}$ platí $\rho(L + m) = \rho(L) + m$. (Přidání jisté ztráty m zvýší riziko o m .)
3. **Pozitivní homogenita:** Pro $a \geq 0$ platí $\rho(aL) = a\rho(L)$. (Zdvojnásobení pozice zdvojnásobí riziko.)

Nechť L je náhodná ztráta. Míra rizika je zobrazení $\rho(L) \in \mathbb{R}$.

Motivace: Další pokus o „rozumné“ kritérium výběru náhodné ztráty.

Definice. Míra rizika ρ se nazývá **koherentní**, pokud pro všechna rizika L_1, L_2 a $a \geq 0$ platí:

1. **Monotonicita:** Pokud $L_1 \leq L_2$ (ve všech scénářích), pak $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.
2. **Translační invariance:** Pro každé $m \in \mathbb{R}$ platí $\rho(L + m) = \rho(L) + m$. (Přidání jisté ztráty m zvýší riziko o m .)
3. **Pozitivní homogenita:** Pro $a \geq 0$ platí $\rho(aL) = a\rho(L)$. (Zdvojnásobení pozice zdvojnásobí riziko.)
4. **Subaditivita:** $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$. (Diverzifikace nesmí riziko „zhoršovat“.)

ρ konstantní ztráty

Nechť ρ je koherentní míra rizika ve smyslu předchozí definice a $m \in \mathbb{R}$ je **konstantní ztráta**, tj. $L(\omega) \equiv m$ pro všechny scénáře. Pak

$$\rho(L) = \rho(m) = m.$$

ρ konstantní ztráty

Nechť ρ je koherentní míra rizika ve smyslu předchozí definice a $m \in \mathbb{R}$ je **konstantní ztráta**, tj. $L(\omega) \equiv m$ pro všechny scénáře. Pak

$$\rho(L) = \rho(m) = m.$$

Důkaz: **1. Krok:** $\rho(0) = 0$: Z pozitivní homogenity pro $a = 0$:

$$\rho(0) = \rho(0 \cdot L) = 0 \cdot \rho(L) = 0.$$

Nechť ρ je koherentní míra rizika ve smyslu předchozí definice a $m \in \mathbb{R}$ je **konstantní ztráta**, tj. $L(\omega) \equiv m$ pro všechny scénáře. Pak

$$\rho(L) = \rho(m) = m.$$

Důkaz: **1. Krok:** $\rho(0) = 0$: Z pozitivní homogenity pro $a = 0$:

$$\rho(0) = \rho(0 \cdot L) = 0 \cdot \rho(L) = 0.$$

2. Krok: Použití translační invariance.

- Konstantní ztrátu m můžeme zapsat jako $L = 0 + m$.
- Translační invariance říká: $\rho(0 + m) = \rho(0) + m$.
- Dosadíme výsledek z předchozího kroku: $\rho(m) = \rho(0) + m = 0 + m = m$.

Ilustrace axiomů

Uvažujme následující ztráty ($p_i > 0$) a koherentní rizikovou míru ρ .

Scénář	Pravd.	L^1	L^2	L^3	L^4	L^5
1	p_1	0	1	0	4	2
2	p_2	1	2	2	3	2
3	p_3	2	3	4	2	2

1. Monotonicita: máme $L^1 < L^2$, $L^1 \leq L^4$, $L^5 \leq L^4$, proto platí $\rho(L^1) < \rho(L^2)$, $\rho(L^1) \leq \rho(L^4)$, $\rho(L^5) \leq \rho(L^4)$.

Ilustrace axiomů

Uvažujme následující ztráty ($p_i > 0$) a koherentní rizikovou míru ρ .

Scénář	Pravd.	L^1	L^2	L^3	L^4	L^5
1	p_1	0	1	0	4	2
2	p_2	1	2	2	3	2
3	p_3	2	3	4	2	2

1. Monotonicita: máme $L^1 < L^2$, $L^1 \leq L^4$, $L^5 \leq L^4$, proto platí $\rho(L^1) < \rho(L^2)$, $\rho(L^1) \leq \rho(L^4)$, $\rho(L^5) \leq \rho(L^4)$.
2. Transl. inv: máme $L^2 = L^1 + 1$, takže $\rho(L^2) = \rho(L^1) + 1$

Ilustrace axiomů

Uvažujme následující ztráty ($p_i > 0$) a koherentní rizikovou míru ρ .

Scénář	Pravd.	L^1	L^2	L^3	L^4	L^5
1	p_1	0	1	0	4	2
2	p_2	1	2	2	3	2
3	p_3	2	3	4	2	2

1. Monotonicita: máme $L^1 < L^2$, $L^1 \leq L^4$, $L^5 \leq L^4$, proto platí $\rho(L^1) < \rho(L^2)$, $\rho(L^1) \leq \rho(L^4)$, $\rho(L^5) \leq \rho(L^4)$.
2. Transl. inv: máme $L^2 = L^1 + 1$, takže $\rho(L^2) = \rho(L^1) + 1$
3. Pos. hom.: máme $L^3 = 2L^1$, takže $\rho(L^3) = 2\rho(L^1)$

Ilustrace axiomů

Uvažujme následující ztráty ($p_i > 0$) a koherentní rizikovou míru ρ .

Scénář	Pravd.	L^1	L^2	L^3	L^4	L^5
1	p_1	0	1	0	4	2
2	p_2	1	2	2	3	2
3	p_3	2	3	4	2	2

1. Monotonicita: máme $L^1 < L^2$, $L^1 \leq L^4$, $L^5 \leq L^4$, proto platí $\rho(L^1) < \rho(L^2)$, $\rho(L^1) \leq \rho(L^4)$, $\rho(L^5) \leq \rho(L^4)$.
2. Transl. inv: máme $L^2 = L^1 + 1$, takže $\rho(L^2) = \rho(L^1) + 1$
3. Pos. hom.: máme $L^3 = 2L^1$, takže $\rho(L^3) = 2\rho(L^1)$
4. Subadditivita: máme $L^1 + L^4 = 4$, takže $\rho(L^1) + \rho(L^4) \geq 4$.

Ilustrace axiomů

Uvažujme následující ztráty ($p_i > 0$) a koherentní rizikovou míru ρ .

Scénář	Pravd.	L^1	L^2	L^3	L^4	L^5
1	p_1	0	1	0	4	2
2	p_2	1	2	2	3	2
3	p_3	2	3	4	2	2

1. Monotonicita: máme $L^1 < L^2$, $L^1 \leq L^4$, $L^5 \leq L^4$, proto platí $\rho(L^1) < \rho(L^2)$, $\rho(L^1) \leq \rho(L^4)$, $\rho(L^5) \leq \rho(L^4)$.
2. Transl. inv: máme $L^2 = L^1 + 1$, takže $\rho(L^2) = \rho(L^1) + 1$
3. Pos. hom.: máme $L^3 = 2L^1$, takže $\rho(L^3) = 2\rho(L^1)$
4. Subadditivita: máme $L^1 + L^4 = 4$, takže $\rho(L^1) + \rho(L^4) \geq 4$.

Ilustrace axiomů

Uvažujme následující ztráty ($p_i > 0$) a koherentní rizikovou míru ρ .

Scénář	Pravd.	L^1	L^2	L^3	L^4	L^5
1	p_1	0	1	0	4	2
2	p_2	1	2	2	3	2
3	p_3	2	3	4	2	2

1. Monotonicita: máme $L^1 < L^2$, $L^1 \leq L^4$, $L^5 \leq L^4$, proto platí $\rho(L^1) < \rho(L^2)$, $\rho(L^1) \leq \rho(L^4)$, $\rho(L^5) \leq \rho(L^4)$.
2. Transl. inv: máme $L^2 = L^1 + 1$, takže $\rho(L^2) = \rho(L^1) + 1$
3. Pos. hom.: máme $L^3 = 2L^1$, takže $\rho(L^3) = 2\rho(L^1)$
4. Subadditivita: máme $L^1 + L^4 = 4$, takže $\rho(L^1) + \rho(L^4) \geq 4$.

Kromě toho $\rho(L^5) = 2$

Míry rizika – příklady

Míra rizika ρ	Monot.	Tr. inv.	Poz. hom.	Subad.
Střední hodnota $\mathbb{E}[L]$	Ano	Ano	Ano	Ano
Sm. odchylka $\sigma(L)$	Ne	Ne	Ano	Ano
Supremum $\sup L$ (nejhorší scénář)	Ano	Ano	Ano	Ano
$V@R_\alpha$	Ano	Ano	Ano	Ne
$CV@R_\alpha$	Ano	Ano	Ano	Ano
Mean-sm. odch.: $\mathbb{E}[L] + \lambda\sigma(L), \lambda > 0$,	Ne [†]	Ano	$\mathbf{1}[\lambda = 1]$	Ano
Mean-CVaR : $\lambda \mathbb{E}[L] + (1 - \lambda)CV@R_\alpha(L), \lambda \in [0, 1]$,	Ano	Ano	Ano	Ano

- **Sm. odchylka:** není monotónní (může klesnout i při „horší“ ztrátě) ani translačně invariantní ($\sigma(L + m) = \sigma(L)$).
- $V@R_\alpha$ obecně není subaditivní (diverzifikace může „zhoršit“ $V@R$).
- **Mean-sm. odch.:** $\rho(L) = \mathbb{E}[L] + \lambda\sigma(L), \lambda > 0$; přebírá problémy monotonicity od σ .

† Ano pokud X a Y jsou normální, pak totiž $X \geq Y$ a.s. $\Rightarrow \mathbb{E}X \geq \mathbb{E}Y, \text{var}(X) = \text{var}(Y)$ (důkaz přes stochastickou Cinanci a srovnání kvantilů).*

Selhání monotonicity pro míru $\rho(L) = \mathbb{E}[L] + \sigma(L)^*$

Uvažujme dvě náhodné ztráty L_1 a L_2 na se třemi scénáři $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ se stejnými pravděpodobnostmi:

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3},$$

	ω_1	ω_2	ω_3
L_1	0	1	1
L_2	1	1	1

Selhání monotonicity pro míru $\rho(L) = \mathbb{E}[L] + \sigma(L)^*$

Uvažujme dvě náhodné ztráty L_1 a L_2 na se třemi scénáři $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ se stejnými pravděpodobnostmi:

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3},$$

	ω_1	ω_2	ω_3
L_1	0	1	1
L_2	1	1	1

Zřejmě: $L_1(\omega) \leq L_2(\omega)$ pro všechna ω ,

Selhání monotonicity pro míru $\rho(L) = \mathbb{E}[L] + \sigma(L)^*$

Uvažujme dvě náhodné ztráty L_1 a L_2 na se třemi scénáři $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ se stejnými pravděpodobnostmi:

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3},$$

	ω_1	ω_2	ω_3
L_1	0	1	1
L_2	1	1	1

Zřejmě: $L_1(\omega) \leq L_2(\omega)$ pro všechna ω ,

Ale

$$\mathbb{E}[L_1] = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{E}[L_2] = \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

$$\sigma(L_1) = \sqrt{\frac{1}{3}\left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0.47, \quad \sigma(L_2) = 0 \quad (\text{konstantní ztráta}).$$

Selhání monotonicity pro míru $\rho(L) = \mathbb{E}[L] + \sigma(L)^*$

Uvažujme dvě náhodné ztráty L_1 a L_2 na se třemi scénáři $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ se stejnými pravděpodobnostmi:

$$\mathbb{P}(\omega_1) = \mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = \frac{1}{3},$$

	ω_1	ω_2	ω_3
L_1	0	1	1
L_2	1	1	1

Zřejmě: $L_1(\omega) \leq L_2(\omega)$ pro všechna ω ,

Ale

$$\mathbb{E}[L_1] = \frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{E}[L_2] = \frac{1+1+1}{3} = 1.$$

$$\sigma(L_1) = \sqrt{\frac{1}{3}\left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} \approx 0.47, \quad \sigma(L_2) = 0 \quad (\text{konstantní ztráta}).$$

$$\Rightarrow \rho(L_1) \approx \frac{2}{3} + 0.47 \approx 1.14 > \rho(L_2) = 1 + 0 = 1.$$

Fakt. Koherentní míry rizika mají v sobě zahrnutý i výnos (viz trans. inv.)

Doporučení: Jak přistoupit k riziku?

Vadí dvě kritéria?

Ne Použij $\mathbb{E}L$ pro výnos a míru rizika nezahrnující výnos (σ nebo $\rho(L) - \mathbb{E}L$ pro nějakou koherentní míru)

Ano Znáš utítkovou funkci a je vhodné ji použít?

Ano Použij $\mathbb{E}u(-L)$

Ne Použij $\varrho(L) := \lambda\mathbb{E}L + (1 - \lambda)\rho(L)$, kde ρ e koherentní a λ parametr rizikové averze.

Jakou ρ použít?

Je L normálně rozdělená?

Ano Pokud není nějaký speciální důvod pro opak, použij $\rho(L) = \mathbb{E}L + \sigma(L)$ (zde jsou $V\text{@}R(L) - \mathbb{E}L$ i $CV\text{@}R(L) - \mathbb{E}L$ násobky σ , takže $V\text{@}R(L)$ ani $CV\text{@}R(L)$ tu „nepřinašejí nic nového“).

Ne Zvol $\rho(L) = CV\text{@}R$

Měny

Měny – základní představa

- **Měna** = obecně používaný prostředek směny na daném území nebo v určité komunitě.
- Plní tři základní funkce:
 - **prostředek směny** – za měnu kupujeme statky a služby,
 - **účtovací jednotka** – v měně se vyjadřují ceny, mzdy, účetnictví,
 - **uchovatel hodnoty** – ideálně si uchovává kupní sílu v čase.
- Měny mohou být:
 - **komoditní** (např. zlato, stříbro),
 - **fiat** (současné „papírové“ peníze – CZK, EUR, USD),
 - **digitální** (kryptoměny, případně digitální měny centrálních bank).
- Důvěra v měnu závisí na:
 - stabilitě kupní síly (inflace/deflace),
 - právním a institucionálním rámci (centrální banka, stát),
 - technické infrastruktuře (platební systém, síť).

Příklady měn

	Zlato	Peníze (fiat)	Kryptoměny
Emitent	nikdo (komodita)	stát / centrální banka	protokol / síť (bez centrální autority)
Přírůstek	těžba	emise	„těžba“
Fyzická/digitální	fyzická	fyzická i digitální	čistě digitální
Likvidita	dobrá, hůře dělitelná	velmi dobrá	závisí na důvěře
Regulace	obecné právo	silně regulované (zákony)	regulace začíná
Příklady	slitek, mince	CZK, EUR, USD	Bitcoin, Ethereum, stablecoiny

Příklady měn

	Zlato	Peníze (fiat)	Kryptoměny
Emitent	nikdo (komodita)	stát / centrální banka	protokol / síť (bez centrální autority)
Přírůstek	těžba	emise	„těžba“
Fyzická/digitální	fyzická	fyzická i digitální	čistě digitální
Likvidita	dobrá, hůře dělitelná	velmi dobrá	závisí na důvěře
Regulace	obecné právo	silně regulované (zákony)	regulace začíná
Příklady	slitek, mince	CZK, EUR, USD	Bitcoin, Ethereum, stablecoiny

Pozn.: Vlastnosti měny měly či mají: vzácné přírodniny (např. mušličky), Tuzexové poukázky (bony, v ČR za komunismu), stravenky, lokální měny (zavedené pro podporu místního podnikání), herní měny

Měnový kurz (exchange rate)

- vždy vyjadřuje **jednu měnu v druhé**
- **spotový kurz (SR, spot rate)** – pro okamžitou směnu
- **forwardový kurz (FR, forward rate)** – pro budoucí směnu (viz deriváty)
- **bid (buy)** – kurz, za který banka kupuje cizí měnu od klienta
- **ask (offer, sell)** – kurz, za který banka prodává cizí měnu klientovi
- **střed (middle)** – aritmetický průměr bid a ask
- **rozpětí (spread)** – ask - bid

Zápis kurzu:

$SR_{\text{cizí/domáci}}$

- **domáci měna** (base, fixed), **cizí měna** (foreign, second)

Zápis kurzu:

$$SR_{\text{cizí/domácí}}$$

- **domácí měna** (base, fixed), **cizí měna** (foreign, second)

Přímá kotace (direct): jednotka **cizí** měny v jednotkách **domácí** měny

$$SR_{\text{USD/CZK}} = 23.3 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ USD} = 23.3 \text{ CZK}$$

Zápis kurzu:

$$SR_{\text{cizí/domácí}}$$

- **domácí měna** (base, fixed), **cizí měna** (foreign, second)

Přímá kotace (direct): jednotka **cizí** měny v jednotkách **domácí** měny

$$SR_{\text{USD/CZK}} = 23.3 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ USD} = 23.3 \text{ CZK}$$

Nepřímá kotace (indirect): jednotka **domácí** měny v jednotkách **cizí** měny

$$SR_{\text{CZK/USD}} = 0.0429 \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ CZK} = 0.0429 \text{ USD}$$

Bid / ask

- $SR_{A/B}^{bid}$ – počet jednotek B za který **banka kupuje jednotku A** (klient A **prodává** za B).
- $SR_{A/B}^{ask}$ – počet jednotek B , za který **banka prodává jednotku A** (klient A **nakupuje** za B).
- Vždy platí: $SR_{A/B}^{bid} \leq SR_{A/B}^{ask}$.

Inverzní (reciproční) kotace

- Kotace A/B implikuje kotaci B/A : $SR_{B/A} = \frac{1}{SR_{A/B}}$.
- U bid/ask se při inverzi **prohodí strany**:

$$SR_{B/A}^{bid} = \frac{1}{SR_{A/B}^{ask}}, \quad SR_{B/A}^{ask} = \frac{1}{SR_{A/B}^{bid}}.$$

Směnárna Change Ishak Yaser IC / Company reg. ID: 48241827 commission 0.3%

Kurzovní listek / Exchange rate: 24.9.2018

měna / currency	1 jednotka / 1 unit	nový nákupní kurz / new buy rate	nový prodejní kurz / new sell rate
Euro	1 EUR	25.20 CZK	26.00 CZK
Americký dolar	1 USD	21.80 CZK	22.50 CZK
Anglická libra	1 GBP	27.70 CZK	29.30 CZK
Švýcarský frank	1 CHF	22.20 CZK	23.20 CZK
Maďarský forint	100 HUF	7.50 CZK	8.80 CZK
Chorvatská kuna	1 HRK	3.20 CZK	3.75 CZK
Kanadský dolar	1 CAD	16.20 CZK	17.20 CZK
Polský zloty	1 PLN	5.80 CZK	6.20 CZK
Dánská koruna	1 DKK	3.20 CZK	3.55 CZK
Norská koruna	1 NOK	2.50 CZK	2.70 CZK
Švédská koruna	1 SEK	2.20 CZK	2.50 CZK
Austrálský Dolar	1 AUD	15.00 CZK	16.00 CZK

Příklad - kotace bid/ask

Příklad 7.1. Banka má kotaci $SR_{USD/EUR}^{bid} = 0,9163$, $SR_{USD/EUR}^{ask} = 0,9307$.

- (a) Kolik eur obdrží klient za 25 000 USD?
- (b) Kolik eur musí klient zaplatit, aby koupil 25 000 USD?
- (c) Kolik dolarů dostane klient za 10 000 EUR?

Řešení. Označme $K_{měna}$ příslušné částky. **(a)** Prodej USD bance – použijeme bid kurz:

$$K_{USD} = 25\,000, K_{EUR} = K_{USD} \cdot SR_{USD/EUR}^{bid} = 25\,000 \cdot 0,9163 = 22\,907,50 \text{ EUR.}$$

(b) Nákup USD od banky – použijeme ask kurz:

$$K_{USD} = 25\,000, K_{EUR} = K_{USD} \cdot SR_{USD/EUR}^{ask} = 25\,000 \cdot 0,9307 = 23\,267,50 \text{ EUR.}$$

(c) Prodej EUR bance – použijeme inverzní bid kurs: $K_{EUR} = 10\,000$, $SR_{EUR/USD}^{bid} =$

$$\frac{1}{SR_{USD/EUR}^{ask}} = \frac{1}{0,9307} \approx 1,0745, K_{USD} = K_{EUR} SR_{EUR/USD}^{bid} = 10\,000 \cdot 1,0745 \approx 10\,745.$$

Křížový měnový kurz (cross exchange rate)

Uvažujme měny A, B Známe jejich kurzy vůči měně C, chceme kurz B/A .

Křížový měnový kurz (cross exchange rate)

Uvažujme měny A, B Známe jejich kurzy vůči měně C, chceme kurz B/A .

Křížový kurz:

$$\tilde{S}_{B/A|C} = \frac{S_{B/C}}{S_{A/C}},$$

Křížový měnový kurz (cross exchange rate)

Uvažujme měny A, B. Známe jejich kurzy vůči měně C, chceme kurz B/A .

Křížový kurz:

$$\tilde{SR}_{B/A|C} = \frac{SR_{B/C}}{SR_{A/C}},$$

Křížový kurz bid: Kolik A získáme směněmi B za C a C za A

$$\tilde{SR}_{B/A|C}^{\text{bid}} = SR_{B/C}^{\text{bid}} SR_{C/A}^{\text{bid}} = \frac{SR_{B/C}^{\text{bid}}}{SR_{A/C}^{\text{ask}}},$$

Křížový měnový kurz (cross exchange rate)

Uvažujme měny A, B. Známe jejich kurzy vůči měně C, chceme kurz B/A .

Křížový kurz:

$$\tilde{SR}_{B/A|C} = \frac{SR_{B/C}}{SR_{A/C}},$$

Křížový kurz bid: Kolik A získáme směněmi B za C a C za A

$$\tilde{SR}_{B/A|C}^{\text{bid}} = SR_{B/C}^{\text{bid}} SR_{C/A}^{\text{bid}} = \frac{SR_{B/C}^{\text{bid}}}{SR_{A/C}^{\text{ask}}},$$

Křížový kurz ask: Kolik A zaplatíme za nákup B přes C

$$\tilde{SR}_{B/A|C}^{\text{ask}} = SR_{B/C}^{\text{ask}} SR_{C/A}^{\text{ask}} = \frac{SR_{B/C}^{\text{ask}}}{SR_{A/C}^{\text{bid}}}.$$

Příklad - křížový kurz

Příklad 7.2. Jsou dány přímé kurzy vůči USD pro měny CHF (švýcarský frank) a CNY (čínský jüan). Jaký je (a) nákupní a (b) prodejní kurz CHF vůči CNY?

	bid	ask
$SR_{\text{CHF/USD}}$	1,0453	1,1548
$SR_{\text{CNY/USD}}$	0,1334	0,1466

Řešení. (a) Nákupní (bid) kurz CHF/CNY:

$$\tilde{SR}_{\text{CHF/CNY|USD}}^{\text{bid}} = \frac{SR_{\text{CHF/USD}}^{\text{bid}}}{SR_{\text{CNY/USD}}^{\text{ask}}} = \frac{1,0453}{0,1466} \approx 7,13 \text{ CNY za 1 CHF.}$$

(b) Prodejní (ask) kurz CHF/CNY:

$$\tilde{SR}_{\text{CHF/CNY|USD}}^{\text{ask}} = \frac{SR_{\text{CHF/USD}}^{\text{ask}}}{SR_{\text{CNY/USD}}^{\text{bid}}} = \frac{1,1548}{0,1334} \approx 8,66 \text{ CNY za 1 CHF.}$$

Trojúhelníková arbitráž je ziskový obchod založený na nesouladu kurzů tří měn tím, že postupně směním měnu A za B, B za C a C zpět za A a na konci získám víc měny A, než jsem měl na začátku.

Trojúhelníková arbitráž je ziskový obchod založený na nesouladu kurzů tří měn tím, že postupně smění měnu A za B, B za C a C zpět za A a na konci získám víc měny A, než jsem měl na začátku.

Fakt. Při nulovém rozpětí (ask = bid) by nutně platlo $SR_{A/B} = \tilde{S}R_{A/B|C}$

Důkaz: Pokud směním A za B zprostředkovaně, a pak zpět za B, musím dostat stejné množství, tj $\tilde{S}R_{A/B|C}SR_{B/A} = 1$, což dává výše uvedenou rovnost protože $SR_{B/A} = SR_{A/B}^{-1}$.

\Rightarrow to by znamenalo, že $SR_{A/B}$ je přesně určen $SR_{A/C}$ a $SR_{B/C}$.

Arbitrážní meze kursů

Trojúhelníková arbitráž je ziskový obchod založený na nesouladu kurzů tří měn tím, že postupně smění měnu A za B, B za C a C zpět za A a na konci získám víc měny A, než jsem měl na začátku.

Fakt. V případě nenulového spreadu

$$(i) SR_{A/B}^{ask} \geq \tilde{SR}_{A/B|C}^{bid}, \quad (ii) SR_{A/B|C}^{bid} \leq \tilde{SR}_{A/B}^{ask}$$

Důkaz:

- (i) Mějme jednotku A. Pokud by platila $<$ pak by bylo lze získat jednotku měny A za $SR_{A/B}^{ask}$ jednotek a následně ji zpět vyměnit křížově za vyšší množství $\tilde{SR}_{B/A|C}^{bid}$ jednotek.
- (ii) Analogicky: nákup A křížově a prodej přímo.

Trojúhelníková arbitráž je ziskový obchod založený na nesouladu kurzů tří měn tím, že postupně smění měnu A za B, B za C a C zpět za A a na konci získám víc měny A, než jsem měl na začátku.

Pozorování: Střední kurs může porušovat arbitrážní pravidlo, bid a ask nikoli.

Konkrétně dvě možnosti porušení:

- (i) $(SR^{bid} <) SR^{ask} < \tilde{SR}^{bid}$, tj. vyplatí se kupovat za kotovaný kurs a prodávat přes třetí měnu.
- (2) $\tilde{SR}^{ask} < SR^{bid} (< SR^{ask})$, tj. vyplatí se kupovat zprostředkovaně a prodávat za kotovaný.

Příklad: Arbitrážní meze kurzu USD/CZK

Příklad 7.3. Banka kotuje:

$$SR_{EUR/CZK}^{bid} = 24,5, \quad SR_{EUR/CZK}^{ask} = 24,6, \quad SR_{USD/EUR}^{bid} = 0,88, \quad SR_{USD/EUR}^{ask} = 0,89.$$

Jakých hodnot můžou nabývat $SR_{USD/CZK}^{bid}$ a $SR_{USD/CZK}^{ask}$, aby nenastávala arbitráž?

Řešení.

$$SR_{USD/CZK}^{ask} \geq \tilde{SR}_{USD/CZK|EUR}^{bid} = SR_{USD/EUR}^{bid} SR_{EUR/CZK}^{bid} = 24.5 \times 0.88 = 21,56.$$

$$SR_{USD/CZK}^{bid} \leq \tilde{SR}_{USD/CZK|EUR}^{ask} = SR_{USD/EUR}^{ask} SR_{EUR/CZK}^{ask} = 24.6 \times 0.89 = 21.894$$

a samozřejmě

$$SR_{USD/CZK}^{ask} \geq SR_{USD/CZK}^{bid}$$

Stochastické modelování měnových kursů*

Rovnice pro log-kurs (ve spojitém čase):

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \sigma dW_t$$

- X_t ... stav procesu - log-kurz
- $\kappa > 0$... rychlost návratu k průměru (mean reversion)
- θ ... dlouhodobý střed (rovnovážná hodnota)
- $\sigma > 0$... volatilita
- W_t ... Wienerův (Brownův) proces

Kurs:

$$S_t = \exp\{X_t\}$$

Stochastické modelování měnových kursů*

Rovnice pro log-kurs (ve spojitém čase):

$$dX_t = \kappa(\theta - X_t) dt + \sigma dW_t$$

- X_t ... stav procesu - log-kurz
- $\kappa > 0$... rychlost návratu k průměru (mean reversion)
- θ ... dlouhodobý střed (rovnovážná hodnota)
- $\sigma > 0$... volatilita
- W_t ... Wienerův (Brownův) proces

Kurs:

$$S_t = \exp\{X_t\}$$

Šlo by diskretizovat podobně jako u akcií

Příklad - intervence ČNB



- V roce 2013 se ČNB *zavázala* k udržování kurzu na $SR_{EUR/CZK} \geq 27$

Příklad - intervence ČNB



- V roce 2013 se ČNB *zavázala* k udržování kurzu na $SR_{EUR/CZK} \geq 27$
- Důvodem bylo zabránit snižování inflace

Příklad - intervence ČNB



- V roce 2013 se ČNB *zavázala* k udržování kurzu na $SR_{EUR/CZK} \geq 27$
- Důvodem bylo zabránit snižování inflace
- Musela čelit tlakům na *posilování* koruny (=snižování $SR_{EUR/CZK}$)

Příklad - intervence ČNB



- V roce 2013 se ČNB *zavázala* k udržování kurzu na $SR_{EUR/CZK} \geq 27$
- Důvodem bylo zabránit snižování inflace
- Musela čelit tlakům na *posilování* koruny (=snižování $SR_{EUR/CZK}$)
- Prostředkem byly intervence, zde *nákup* EUR (v okamžicích kdy $SR_{EUR/CZK} \downarrow$, „nakupovala levná EURa až je vykoupila“)

Příklad - intervence ČNB



- V roce 2013 se ČNB *zavázala* k udržování kurzu na $SR_{EUR/CZK} \geq 27$
- Důvodem bylo zabránit snižování inflace
- Musela čelit tlakům na *posilování* koruny (=snižování $SR_{EUR/CZK}$)
- Prostředkem byly intervence, zde *nákup* EUR (v okamžicích kdy $SR_{EUR/CZK} \downarrow$, „nakupovala levná EURa až je vykoupila“)
- Makroekonomicky hodnoceno jako úspěch

Příklad - intervence ČNB



- V roce 2013 se ČNB *zavázala* k udržování kurzu na $SR_{EUR/CZK} \geq 27$
- Důvodem bylo zabránit snižování inflace
- Musela čelit tlakům na *posilování* koruny (=snižování $SR_{EUR/CZK}$)
- Prostředkem byly intervence, zde *nákup* EUR (v okamžicích kdy $SR_{EUR/CZK} \downarrow$, „nakupovala levná EURa až je vykoupila“)
- Makroekonomicky hodnoceno jako úspěch
- Účetně ztráta (nakoupené dolary zlevnily), prakticky se neprojevila (ČNB peníze na intervence částečně „tiskne“)

Kryptoměny a DeFi (decentralizované finance)

- umožňují realizovat finanční transakce bez účasti tradičních aktérů (bank),
- typicky fungují v režimu **peer-to-peer (P2P)**.

Kryptoměny a DeFi (decentralizované finance)

- umožňují realizovat finanční transakce bez účasti tradičních aktérů (bank),
- typicky fungují v režimu **peer-to-peer (P2P)**.

Kryptoměna

- virtuální měna využívající kryptografii pro zabezpečení transakcí,
- transakce jsou zapisovány do **blockchainu** – distribuované databáze (ledger),
- **mining** = proces ověřování a zapisování transakcí do blockchainu (řešení výpočetně náročných úloh).

Kryptoměny a DeFi (decentralizované finance)

- umožňují realizovat finanční transakce bez účasti tradičních aktérů (bank),
- typicky fungují v režimu **peer-to-peer (P2P)**.

Kryptoměna

- virtuální měna využívající kryptografii pro zabezpečení transakcí,
- transakce jsou zapisovány do **blockchainu** – distribuované databáze (ledger),
- **mining** = proces ověřování a zapisování transakcí do blockchainu (řešení výpočetně náročných úloh).

Příklady kryptoměn / platforem: Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH), BNB, burza Binance (největší krypto-burza).

Kryptoměny a DeFi (decentralizované finance)

- umožňují realizovat finanční transakce bez účasti tradičních aktérů (bank),
- typicky fungují v režimu **peer-to-peer (P2P)**.

Kryptoměna

- virtuální měna využívající kryptografii pro zabezpečení transakcí,
- transakce jsou zapisovány do **blockchainu** – distribuované databáze (ledger),
- **mining** = proces ověřování a zapisování transakcí do blockchainu (řešení výpočetně náročných úloh).

Příklady kryptoměn / platforem: Bitcoin (BTC), Ethereum (ETH), BNB, burza Binance (největší krypto-burza).

Viz článek <https://cs.wikipedia.org/wiki/Bitcoin> (považujte za studijní materiál)

- Neexistuje široce používaná ekonomika s cenami zboží a služeb v BTC \Rightarrow klasická parita kupní síly (PPP) se nedá rozumně aplikovat

- Neexistuje široce používaná ekonomika s cenami zboží a služeb v BTC \Rightarrow klasická parita kupní síly (PPP) se nedá rozumně aplikovat
- Neexistují státní dluhopisy denominované v BTC \Rightarrow nelze definovat standardní bezrizikovou sazbu \Rightarrow klasická parita úrokových sazeb je nepoužitelná

- Neexistuje široce používaná ekonomika s cenami zboží a služeb v BTC \Rightarrow klasická parita kupní síly (PPP) se nedá rozumně aplikovat
 - Neexistují státní dluhopisy denominované v BTC \Rightarrow nelze definovat standardní bezrizikovou sazbu \Rightarrow klasická parita úrokových sazeb je nepoužitelná
- \Rightarrow kurz nedrží žádná fundamentální kotva (PPP, IRP, měnová politika) \Rightarrow velmi vysoká volatilita (BTC/USD je řádově volatilnější než EUR/USD)

! Vytváří cenovou bublinu, která jednou splaskne

! Vytváří cenovou bublinu, která jednou splaskne

A: Dochází k opakovaným extrémním růstům a propadům, dlouhodobý osud je nejistý

! Vytváří cenovou bublinu, která jednou splaskne

A: Dochází k opakovaným extrémním růstům a propadům, dlouhodobý osud je nejistý

! Anonymita umožňuje financovat kriminální činnost

! Vytváří cenovou bublinu, která jednou splaskne

A: Dochází k opakovaným extrémním růstům a propadům, dlouhodobý osud je nejistý

! Anonymita umožňuje financovat kriminální činnost

A: Bitcoin je spíše pseudonymní – transakce jsou veřejné na úrovni adres, (ale existují nástroje a měny zaměřené na vyšší anonymitu)

! Vytváří cenovou bublinu, která jednou splaskne

A: Dochází k opakovaným extrémním růstům a propadům, dlouhodobý osud je nejistý

! Anonymita umožňuje financovat kriminální činnost

A: Bitcoin je spíše pseudonymní – transakce jsou veřejné na úrovni adres, (ale existují nástroje a měny zaměřené na vyšší anonymitu)

! Těžba zbytečně spotřebovává elektřinu

! Vytváří cenovou bublinu, která jednou splaskne

A: Dochází k opakovaným extrémním růstům a propadům, dlouhodobý osud je nejistý

! Anonymita umožňuje financovat kriminální činnost

A: Bitcoin je spíše pseudonymní – transakce jsou veřejné na úrovni adres, (ale existují nástroje a měny zaměřené na vyšší anonymitu)

! Těžba zbytečně spotřebovává elektřinu

A: Část těžby využívá levnou elektřinu v místech s přebytky (off-peak, vzdálené zdroje), celkový dopad na spotřebu energie a emise je kontroverzní

! Vytváří cenovou bublinu, která jednou splaskne

A: Dochází k opakovaným extrémním růstům a propadům, dlouhodobý osud je nejistý

! Anonymita umožňuje financovat kriminální činnost

A: Bitcoin je spíše pseudonymní – transakce jsou veřejné na úrovni adres, (ale existují nástroje a měny zaměřené na vyšší anonymitu)

! Těžba zbytečně spotřebovává elektřinu

A: Část těžby využívá levnou elektřinu v místech s přebytky (off-peak, vzdálené zdroje), celkový dopad na spotřebu energie a emise je kontroverzní

...

Příklad 7.4. Aktuální kurz EUR/CZK má střed $SR_{0,EUR/CZK} = 24$ a rozpětí 0,10, tj.

$$SR_{0,EUR/CZK}^{bid} = 23,95, SR_{0,EUR/CZK}^{ask} = 24,05.$$

Akcie má současnou cenu $P_0 = 10$ EUR a řídí se standardním modelem s $\mu = 1\%$ a $\sigma = 1\%$

Střední kurz EUR/CZK v čase 1 je náhodný, nezávisle na ceně akcie:

$mid_1 = 24 \pm 0,2$ se stejnou pravděpodobností, v každém případě se stejným spreadem 0,10 (tj. $SR_1^{bid} = mid_1 - 0,05$). Předpokládejme, že výnos akcie a kurz jsou nezávislé.

Investor v čase 0 smění CZK na EUR a koupí 1 akcii, v čase 1 akcii prodá za EUR a ty ihned smění zpět na CZK. Vypočtete **střední hodnotu** absolutního výnosu z této investice a její rozptyl.

Investice do akcie v cizí měně

Řešení. Máme $P_1 = 10(1 + R)$, $R = 0.01 \pm 0.01$ v EURch, kurs v čase 1 má též 2 možnosti. Celkem tedy 4 možnosti, každá se čtvrtinovou pravděpodobností (v každém scénáři akcie je poloviční pravděpodobnost každého kursu měny). Tedy

P_0^{CZK}	Scénář	p_s	R	P_1	mid_1	SR_1^{bid}	P_1^{CZK}	Z_s [Kč]	$p_s Z_s$	$p_s Z_s^2$
24,05	1	0,25	1,00	10	24,2	24,15	241,5	+1,00	0,25	0,25
	2	0,25	1,02	10,2	24,2	24,15	246,33	+5,83	1,46	8,50
	3	0,25	1,00	10	23,8	23,75	237,5	-3,00	-0,75	2,25
	4	0,25	1,02	10,2	23,8	23,75	242,25	+1,75	0,44	0,77
Součet									1,395	11,763

$$E[Z] = \sum p_s Z_s \approx 1,395 \text{ CZK}, \quad \text{Var}(Z) \approx 11,763 - 1,945 \approx 9,818, \quad \sigma(Z) \approx 3,13 \text{ CZK}.$$

Poznámka: Kdyby směna probíhala za kurs střed a ten by platil i v čase jedna, pak by bylo $\mathbb{E}Z = 0,01 \cdot 240 = 2,4$, $\sigma(Z) = 2,4$.

1. Máme $SR_{EUR/CZK}^{bid} = 22.6$, $SR_{EUR/CZK}^{ask} = 22.7$, $SR_{USD/EUR}^{bid} = 0.89$,
 $SR_{USD/EUR}^{ask} = 0.91$, $SR_{USD/CZK}^{bid} = p$. Jakých hodnot může nebýt rozpětí
 $S := SR_{USD/CZK}^{ask} - SR_{USD/CZK}^{bid}$, pokud nemá nastat trojúhelníková arbitráž? Odpověď
napište ve formě intervalu. Poznámka: Místo mechanického dosazení do vzorečků lze
řešit jednodušeji intuitivně.

2. S nenulovou pravděpodobností mohou nastat tři scénáře, při nichž dvě ztráty X a Y nabývají následujících hodnot.

scénář	X	Y
1	5	6
2	6	5
3	q	z

Pro každou z následujících tvrzení specifikujte množinu hodnot z , pro která dané tvrzení platí:

- (i) $\rho(X) + 1 \geq \rho(Y)$ pro jakoukoli koherentní míru rizika ρ ,
- (ii) $\rho_1(X + Y) = \rho_2(X + Y)$ je pro jakoukoli dvojici koherentních měr rizika ρ_1, ρ_2 .

3. Počáteční cena akcie je $P_0 = 100$. Cena se řídí standardním modelem (tzn. $P_{t+1} = P_t(1 + \mu + \sigma S)$, kde $S = \pm 1$ se stejnou pravděpodobností). $\mu = \mu$ a $\sigma = 0.01$. Časová jednotka je týden. Banka vydala depozitní certifikáty s cenou $Q_0 = 100$, se splatností 4 týdny s pevným úrokem 0.5 procenta. Prodalo se n certifikátů, za získané prostředky banka nakoupila akcie, které plánuje za čtyři týdny prodat. Transakční náklady jsou nulové. Jaký je $V@R_{0.9}$ a $CV@R_{0.9}$ absolutní ztráty celého obchodu? Výsledky zaokrouhlete na dvě desetinná místa. Náповěda: využijte faktu, že $CV@R$ je koherentní míra rizika a že $V@R$, ač koherentní není, splňuje některé axiomy koherence.

Finanční deriváty

Finanční deriváty – úvod

Finanční deriváty jsou nástroje, jejichž hodnota je odvozena (*derivována*) od ceny jiného aktiva – tzv. **podkladového aktiva**.

Finanční deriváty – úvod

Finanční deriváty jsou nástroje, jejichž hodnota je odvozena (*derivována*) od ceny jiného aktiva – tzv. **podkladového aktiva**.

Použití:

- zajištění rizika
- cash flow management
- (spekulace)

Finanční deriváty – úvod

Finanční deriváty jsou nástroje, jejichž hodnota je odvozena (*derivována*) od ceny jiného aktiva – tzv. **podkladového aktiva**.

Použití:

- zajištění rizika
- cash flow management
- (spekulace)

Hlavní typy derivátů:

- **forwardy** – individuální dohoda o budoucím obchodu,
- **futures** – standardizované forwardy obchodované na burze,
- **swapy** – výměna platebních toků (např. fixní vs pohyblivá sazba),
- **opce** – právo, nikoli povinnost uskutečnit obchod.

Charakteristiky derivátových kontraktů

- Typ a objem podkladového aktiva
- Typ transakce (nákup/prodej, forward/option)
- Doba splatnosti
- Smluvní nebo tržní cena
- Další údaje (např. rating emitenta)

Klasifikace dle podkladových aktiv:

- **Komoditní** – např. ropa, plyn, kovy
- **Měnové** – např. USD, CNY
- **Úrokové** – na úrokové míry či depozita
- **Indexové** – akciové indexy, pojišťovací indexy
- **Jiné** – povolenky, počasí, . . .

- **Organizované (burzovní)** – standardizované kontrakty \Rightarrow futures, swapy
- **OTC (over-the-counter)** – mimoburzovní dohody \Rightarrow forwardy, swapy, opce

Forwardy – definice

- **Forwardový kontrakt:** dohoda o budoucí směně aktiva za předem stanovenou cenu a k budoucímu datu.
- **Long position:** povinnost koupit za sjednanou cenu (benefit z růstu kurzu)
- **Short position:** povinnost prodat za sjednanou cenu (benefit z poklesu)

Vztah k zajištění: Forward chrání proti budoucí změně ceny či kurzu, např. u zahraničních pohledávek nebo závazků.

Forwardy – definice

- **Forwardový kontrakt:** dohoda o budoucí směně aktiva za předem stanovenou cenu a k budoucímu datu.
- **Long position:** povinnost koupit za sjednanou cenu (benefit z růstu kurzu)
- **Short position:** povinnost prodat za sjednanou cenu (benefit z poklesu)

Vztah k zajištění: Forward chrání proti budoucí změně ceny či kurzu, např. u zahraničních pohledávek nebo závazků.

Příklady:

- **Forward na obilí:** zemědělec čelí jistým nákladům a nejistým výnosům ⇒ uzavře forward na prodej své produkce
- **Forward na měnu:** exportér uzavře smlouvu v EUR, náklady jsou v CZK, příjem v CZK nejistý ⇒ uzavře forward na prodej EUR
- **Forward na CO povolenky:** emise jisté teď, povolenky se odvádějí až následující rok ⇒ firma uzavře forward na nákup povolenek.

Forward v praxi: cash flow

Forward = dohoda dnes o směně měn v čase T za **předem sjednaný kurz** FR .

Strany:

- **Kupující (long forward)** – *kupuje* cizí měnu za kurz FR .
- **Prodávající (short forward)** – *prodává* cizí měnu za kurz FR .

Forward = dohoda dnes o směně měn v čase T za **předem sjednaný kurz** FR .

Strany:

- **Kupující (long forward)** – *kupuje* cizí měnu za kurz FR .
- **Prodávající (short forward)** – *prodává* cizí měnu za kurz FR .

Čas 0 (uzavření kontraktu)

- Nikdo nic neplatí.
- Vzniká právní závazek směniti měny v čase T .

Forward = dohoda dnes o směně měn v čase T za **předem sjednaný kurz** FR .

Strany:

- **Kupující (long forward)** – *kupuje* cizí měnu za kurz FR .
- **Prodávající (short forward)** – *prodává* cizí měnu za kurz FR .

Čas 0 (uzavření kontraktu)

- Nikdo nic neplatí.
- Vzniká právní závazek směniti měny v čase T .

Čas T (splatnost forwardu)

- **Long** zaplatí domácí měnu a obdrží cizí měnu.
- **Short** obdrží domácí měnu a předá cizí měnu.
- Směna proběhne za **kurz** SR_F , bez ohledu na aktuální tržní kurz SR_T .

Příklad – měnový forward (zajištění výnosu)

Příklad 8.1. Česká firma má obdržet za 1 rok 1 000 000 CHF. Spotový kurz: $SR_{\text{CHF}/\text{CZK},0} = 21$, Kurs v čase 1 rok je náhodný, odhadovaná střední hodnota $\mathbb{E}(SR_{\text{CHF}/\text{CZK},1}) = 20$, roční volatilita je 15%, což dává směrodatnou odchylku $\sigma(SR_{\text{CHF}/\text{CZK},1}) \doteq 3$. Banka je ochotna uzavřít forward na $FR_{\text{CHF}/\text{CZK}}^1 = 19.5$. Příjem bez forwardu v čase 1 je tedy náhodný, roven $X := 1M \times SR_{\text{CHF}/\text{CZK},1}$. V případě uzavření forwardu je příjem roven jistě $y = 19.5M$. Pokud z rizikové averze managementu vyplyne, že jistotní ekvivalent X je menší než y , firma forward uzavře.

Příklad 8.2.

Spotový kurs elektřiny je 2300 Kč za MWh. Dodavatel realizuje marži 100 Kč na MWh. Má možnost uzavřít forward na nákup elektřiny následující rok za 2400 Kč za MWh. Nabídne tedy spotřebitelům dva tarify: nákup za spotovou cenu, kterou určí jako spotovou cenu na trhu plus 100 Kč, nebo fixaci na rok za neměnnou cenu 2500.

Princip: Cena forwardu zohledňuje náklady na dodání podkladového aktiva.

1. Bezúročné aktivum (měna, index bez dividend): „Short“ si půjčí za bezrizikovou míru r a koupí podkladové aktivum $\Rightarrow F_0 = S_0(1 + r)^T$, S je cena podkladového aktiva.

Oceňování forwardů

Princip: Cena forwardu zohledňuje náklady na dodání podkladového aktiva.

1. Bezúročné aktivum (měna, index bez dividend): „Short“ si půjčí za bezrizikovou míru r a koupí podkladové aktivum $\Rightarrow F_0 = S_0(1 + r)^T$, S je cena podkladového aktiva.

2. Aktivum s průběžným výnosem (např. dividendy): S si půjčí za bezrizikovou míru, koupí podkladové aktivum, ale mezitím bude vydělávat $\Rightarrow F_0 = S_0(1 + r)^T - PV(\text{dividendy})$.

Oceňování forwardů

Princip: Cena forwardu zohledňuje náklady na dodání podkladového aktiva.

1. Bezúročné aktivum (měna, index bez dividend): „Short“ si půjčí za bezrizikovou míru r a koupí podkladové aktivum $\Rightarrow F_0 = S_0(1 + r)^T$, S je cena podkladového aktiva.

2. Aktivum s průběžným výnosem (např. dividendy): S si půjčí za bezrizikovou míru, koupí podkladové aktivum, ale mezitím bude vydělávat $\Rightarrow F_0 = S_0(1 + r)^T - PV(\text{dividendy})$.

3. Měnový forward: S si půjčí doma a koupí podkladovou měnu a investuje ji v zahraničí \Rightarrow
$$F_0 = S_0 \left(\frac{1+r_{\text{dom}}}{1+r_{\text{for}}} \right)^T .$$

Oceňování forwardů

Princip: Cena forwardu zohledňuje náklady na dodání podkladového aktiva.

1. Bezúročné aktivum (měna, index bez dividend): „Short“ si půjčí za bezrizikovou míru r a koupí podkladové aktivum $\Rightarrow F_0 = S_0(1 + r)^T$, S je cena podkladového aktiva.

2. Aktivum s průběžným výnosem (např. dividendy): S si půjčí za bezrizikovou míru, koupí podkladové aktivum, ale mezitím bude vydělávat $\Rightarrow F_0 = S_0(1 + r)^T - PV(\text{dividendy})$.

3. Měnový forward: S si půjčí doma a koupí podkladovou měnu a investuje ji v zahraničí $\Rightarrow F_0 = S_0 \left(\frac{1+r_{\text{dom}}}{1+r_{\text{for}}} \right)^T$.

4. Komodity se skladovacími náklady a convenience yield: S si půjčí, koupí komoditu, musí ji skladovat, ale možná z ní něco má $\Rightarrow F_0 = S_0 e^{(i+u-y)T}$, kde i - intenzita úročení odpovídající r , u - skladovací náklady (procentní), y - convenience yield (výhoda fyzického držení komodity).

Problém:

- Forward je bilaterální obchod se specifickými parametry (doba splatnosti, množství atd), obtížně převoditelný na třetí stranu.
- Čelí kreditnímu riziku (že jedna strana nedostojí svým závazkům)

Problém:

- Forward je bilaterální obchod se specifickými parametry (doba splatnosti, množství atd), obtížně převoditelný na třetí stranu.
- Čelí kreditnímu riziku (že jedna strana nedostojí svým závazkům)

Futures = forward standardizovaný tak, aby mohl být obchodován na burze.

- Standardizován typ podkladového aktiva (např. dluhopis, akcie)
- Standardizován objem (např. násobky 125 000 EUR)
- Standardizována doba splatnosti (často kvartální cyklus)

Způsob vypořádání:

- denní vypořádání změn (*marking to market*)
- účast clearingové komory – eliminace kreditního rizika protistrany

Futures kontrakt je závazek koupit/prodat podkladové aktivum v budoucnu za cenu sjednanou dnes. Na rozdíl od forwardu probíhá **denní zúčtování (mark-to-market)**.

Kdy kdo platí?

- **Při uzavření kontraktu:** nikdo nic neplatí, ale obě strany musí vložit jistinu zvanou **margin**.
- **Každý den:** burza přepočítá hodnotu kontraktu podle nové ceny.
 - Pokud cena **stoupne**, **long** dostává rozdíl od **shortu**.
 - Pokud cena **klesne**, **short** dostává rozdíl od **longu**.
 - Pokud margin klesne pod **udržovací úroveň**, vzniká **margin call** – nutnost doplnit jistinu.
- Po posledním dni:
 - proběhne **fyzické dodání** (vzácně), nebo
 - **finanční vypořádání** – poslední mark-to-market.

Příklad: Měnový futures

Futures na USD/CZK, velikost kontraktu: **1000 USD**. Počáteční cena: $F_0 = 22,00$ CZK/USD.
Long pozice (kupujeme USD). Počáteční margin 5 000 Kč, udržovací margin 3 000 Kč.

Příklad: Měnový futures

Futures na USD/CZK, velikost kontraktu: **1000 USD**. Počáteční cena: $F_0 = 22,00$ CZK/USD.
Long pozice (kupujeme USD). Počáteční margin 5 000 Kč, udržovací margin 3 000 Kč.

Den	SR_t	FR_t	Denní P/L = $(F_t - F_{t-1}) \cdot 1000$	Stav účtu	Cash Flow	$CF_{forward}$
0	21,50	22,00	-	5 000	-5 000	0
1	21,55	22,20	+200	5 200	0	0
2	22,00	21,70	-500	4 700	0	0
3	22,20	22,50	+800	5 500	0	0
4	22,30	22,40	-100	5 400	0	0
5	22,60		+200	5 600	-17 000 [†]	-22 000
celkem					-22 000	-22 000

[†] 5 600 (uzavření pozice) - 22 600 (nákup měny)

Příklad: Měnový futures

Futures na USD/CZK, velikost kontraktu: **1000 USD**. Počáteční cena: $F_0 = 22,00$ CZK/USD. **Long** pozice (kupujeme USD). Počáteční margin 5 000 Kč, udržovací margin 3 000 Kč.

Den	SR_t	FR_t	Denní P/L = $(F_t - F_{t-1}) \cdot 1000$	Stav účtu	Cash Flow	$CF_{forward}$
0	21,50	22,00	–	5 000	-5 000	0
1	21,55	22,20	+200	5 200	0	0
2	22,00	21,70	-500	4 700	0	0
3	22,20	22,50	+800	5 500	0	0
4	22,30	22,40	-100	5 400	0	0
5	22,60		+200	5 600	-17 000 [†]	-22 000
celkem					-22 000	-22 000

[†] 5 600 (uzavření pozice) - 22 600 (nákup měny)

Pokud by došlo k fyzickému dodání: „Short“ by koupil 1000 USD za cenu 22,60 a prodal by ji za forwardovou cenu 22.00 → $-22\ 600 + 22\ 000 = -600$ Kč ztráta (= zisk „longa“)

Prodej (uzavření futures pozice)

Situace: Předpokládejme **dlouhou futures pozici** (long) s cenou F_0 . Chci ji **předčasně uzavřít** v čase $t < T$.

Mechanismus uzavření:

- Neprobíhá žádná fyzická směna podkladového aktiva.
- Uzavření se provede **otevřením opačné pozice:**

v čase t otevřu **SHORT futures** na tentýž kontrakt za cenu F_t .

- Dlouhá a krátká pozice se **navzájem vyruší**.
- Můj zisk/ztráta při uzavření: $X = (F_t - F_0) \times \text{objem}$

Prodej (uzavření futures pozice)

Situace: Předpokládejme **dlouhou futures pozici** (long) s cenou F_0 . Chci ji **předčasně uzavřít** v čase $t < T$.

Mechanismus uzavření:

- Neprobíhá žádná fyzická směna podkladového aktiva.
- Uzavření se provede **otevřením opačné pozice:**

v čase t otevřu SHORT futures na tentýž kontrakt za cenu F_t .

- Dlouhá a krátká pozice se **navzájem vyruší**.
- Můj zisk/ztráta při uzavření: $X = (F_t - F_0) \times \text{objem}$

Následně:

- Účet marginu se upraví o X a pozice je uzavřena.

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva
- Při blížící se splatnosti konvergují

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva
- Při blížící se splatnosti konvergují
 - Absolutní výnosy F a S jsou podobné

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva
- Při blížící se splatnosti konvergují
 - Absolutní výnosy F a S jsou podobné
 - Ve srovnání s koupí podkladového aktiva je potřeba menší množství prostředků (cena versus margin)

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva
 - Při blížení se splatnosti konvergují
 - Absolutní výnosy F a S jsou podobné
 - Ve srovnání s koupí podkladového aktiva je potřeba menší množství prostředků (cena versus margin)
- ⇒ Větší relativní výnos z investované jednotky měny, ale i větší riziko

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva
 - Při blížení se splatnosti konvergují
 - Absolutní výnosy F a S jsou podobné
 - Ve srovnání s koupí podkladového aktiva je potřeba menší množství prostředků (cena versus margin)
- ⇒ Větší relativní výnos z investované jednotky měny, ale i větší riziko

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva
 - Při blížení se splatnosti konvergují
 - Absolutní výnosy F a S jsou podobné
 - Ve srovnání s koupí podkladového aktiva je potřeba menší množství prostředků (cena versus margin)
- ⇒ Větší relativní výnos z investované jednotky měny, ale i větší riziko

Jistnina eliminuje riziko protistrany

- V držení burzy je dostatečný vklad protistrany pro hrazení průběžných ztrát

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva
 - Při blížící se splatnosti konvergují
 - Absolutní výnosy F a S jsou podobné
 - Ve srovnání s koupí podkladového aktiva je potřeba menší množství prostředků (cena versus margin)
- ⇒ Větší relativní výnos z investované jednotky měny, ale i větší riziko

Jistnina eliminuje riziko protistrany

- V držení burzy je dostatečný vklad protistrany pro hrazení průběžných ztrát
- V případě neochoty protistrany navýšit margin je pozice uzavřena, věřitelská strana má na účtě dostávání zisky a může téměř beze ztráty otevřít další pozici za současnou cen.

Futurese se používají ke spekulaci

- Ceny futures zhruba kopírují podkladová aktiva
 - Při blížící se splatnosti konvergují
 - Absolutní výnosy F a S jsou podobné
 - Ve srovnání s koupí podkladového aktiva je potřeba menší množství prostředků (cena versus margin)
- ⇒ Větší relativní výnos z investované jednotky měny, ale i větší riziko

Jistnina eliminuje riziko protistrany

- V držení burzy je dostatečný vklad protistrany pro hrazení průběžných ztrát
- V případě neochoty protistrany navýšit margin je pozice uzavřena, věřitelská strana má na účtě dostavané zisky a může téměř beze ztráty otevřít další pozici za současnou cen.
- Riziko vyčerpání marginu před uzavřením nese burza

Futures na pšenici – příklad

Příklad (futures na pšenici)

Postup spekulanta:

5. července 1972:

- nákup futures kontraktu na dodávku 5 000 bushelů pšenice v září za cenu 1,55 USD/bu
- zápis: 7,500 USD / 1 kontrakt
- spekulant koupil 200 kontraktů → 1,5 mil. USD

3. srpna 1972:

- cena futures stoupla na 1,72 USD/bu
- spekulant uzavírá pozici (prodej)
- zisk = $0,22 \text{ USD/bu} \times 5\,000 \text{ bu} \times 200 \text{ kontraktů} = 220\,000 \text{ USD}$
- po odečtení poplatků a nákladů: čistý zisk = 190 000 USD

Forward vs. Futures

	Forward	Futures
Obchodování	Mimo burzu (OTC), individuální dohoda stran	Burzovní trh, standardizované kontrakty
Standardizace	Plně přizpůsobitelný: objem, splatnost, podmínky	Fixní velikost kontraktu, přesně dané expirace
Kreditní riziko	Existuje riziko defaultu protistrany	Prakticky eliminováno – clearingová instituce
Způsob vypořádání	Až v čase splatnosti (jednorázově)	Denní zúčtování zisku/ztráty
Margin	Není vyžadován	Vyžaduje se počáteční a udržovací margin
Likvidita	Nižší, individuální kontrakty	Vysoká likvidita díky burzovnímu obchodování
Cena	Teoreticky rovna futures (za ideálních podmínek), ale obsahuje kreditní přírážku	Odpovídá bezrizikové ceně (bez kreditního rizika)

Opce (option) = obchodovatelný cenný papír.

- možnost, ne povinnost provést obchod (nákup, prodej)
- **call** – právo koupit podkladové aktivum za předem danou **realizační cenu (strike price)**
- **put** – právo prodat podkladové aktivum za realizační cenu
- **opční prémie** (= cena opce = „pojistné“)

Opce – základní pojmy

Opce (option) = obchodovatelný cenný papír.

- možnost, ne povinnost provést obchod (nákup, prodej)
- **call** – právo koupit podkladové aktivum za předem danou **realizační cenu (strike price)**
- **put** – právo prodat podkladové aktivum za realizační cenu
- **opční prémie** (= cena opce = „pojistné“)

Strany obchodu: majitel vs. upisovatel.

Opce – základní pojmy

Opce (option) = obchodovatelný cenný papír.

- možnost, ne povinnost provést obchod (nákup, prodej)
- **call** – právo koupit podkladové aktivum za předem danou **realizační cenu (strike price)**
- **put** – právo prodat podkladové aktivum za realizační cenu
- **opční prémie** (= cena opce = „pojistné“)

Strany obchodu: majitel vs. upisovatel.

Typy opcí:

- americká – lze uplatnit kdykoli
- evropská – lze uplatnit pouze v den splatnosti

Opce – základní pojmy

Opce (option) = obchodovatelný cenný papír.

- možnost, ne povinnost provést obchod (nákup, prodej)
- **call** – právo koupit podkladové aktivum za předem danou **realizační cenu (strike price)**
- **put** – právo prodat podkladové aktivum za realizační cenu
- **opční prémie** (= cena opce = „pojistné“)

Strany obchodu: majitel vs. upisovatel.

Typy opcí:

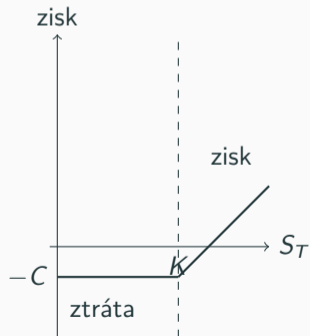
- americká – lze uplatnit kdykoli
- evropská – lze uplatnit pouze v den splatnosti

Prováděcí (Exercise) čas a cena: okamžik uplatnění resp. cena podkladového aktiva v tomto okamžiku.

Call opce

Výnos call opce s strike price K a optční premií c :

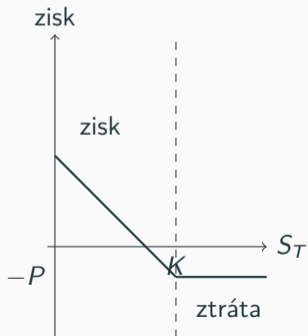
$$X = \max(0, S_T - K) - c, \quad T \text{ a } S - \text{ je realizační čas, cena}$$



Put opce

Výnos put opce se strike price K a opční prémie p :

$$X = \max(0, K - S_T) - p, \quad T - \text{realizační čas, } S_T - \text{cena v čase } T.$$



Jak určit c ?

- opce (přírozeně) existovaly dlouhou dobu, metoda oceňování však byla dlouho nejasná.

Jak určit c ?

- opce (přírozeně) existovaly dlouhou dobu, metoda oceňování však byla dlouho nejasná.
- na přelomu 60 a 70 let přišli Black, Sholes a Merton s ideou replikace, z níž vyplývá Black Scholesova oceňovací formula

Jak určit c ?

- opce (přírozeně) existovaly dlouhou dobu, metoda oceňování však byla dlouho nejasná.
- na přelomu 60 a 70 let přišli Black, Sholes a Merton s ideou replikace, z níž vyplývá Black Scholesova oceňovací formula
- za což obdrželi Nobelovu cenu za ekonomii

Jak určit c ?

- opce (přírozeně) existovaly dlouhou dobu, metoda oceňování však byla dlouho nejasná.
- na přelomu 60 a 70 let přišli Black, Sholes a Merton s ideou replikace, z níž vyplývá Black Scholesova oceňovací formula
- za což obdrželi Nobelovu cenu za ekonomii
- (paradoxně krátce před krachem jimi vlastněného fondu LTCM)

Jak určit c ?

- opce (přírozeně) existovaly dlouhou dobu, metoda oceňování však byla dlouho nejasná.
- na přelomu 60 a 70 let přišli Black, Sholes a Merton s ideou replikace, z níž vyplývá Black Scholesova oceňovací formula
- za což obdrželi Nobelovu cenu za ekonomii
- (paradoxně krátce před krachem jimi vlastněného fondu LTCM)

Jak určit c ?

- opce (přírozeně) existovaly dlouhou dobu, metoda oceňování však byla dlouho nejasná.
- na přelomu 60 a 70 let přišli Black, Sholes a Merton s ideou replikace, z níž vyplývá Black Scholesova oceňovací formula
- za což obdrželi Nobelovu cenu za ekonomii
- (paradoxně krátce před krachem jimi vlastněného fondu LTCM)

Anekdotická evidence: ceny opcí se začaly řídit výše uvedeným vzorcem až po jeho vynalezení.

Oceňování opcí: ilustrace

- Mějme jednokrokový standardní model (tj. současná cena S_0 a budoucí cenou buď $S_u = US_0$ nebo $S_d = LS_0$ se stejnou pravděpodobností).
 - call opci s realizační cenou K , ležící mezi US_0 a LS_0
 - bezrizikový dluhopis s bezrizikovým výnosem $r + 1$.
- ? jaká je opční prémie?

Oceňování opcí: ilustrace

- Mějme jednokrokový standardní model (tj. současná cena S_0 a budoucí cenou buď $S_u = US_0$ nebo $S_d = LS_0$ se stejnou pravděpodobností).
- call opci s realizační cenou K , ležící mezi US_0 a LS_0
- bezrizikový dluhopis s bezrizikovým výnosem $r + 1$.
- ? jaká je opční prémie?

Idea: koupit jako upisovatel v čase splatnosti portfolio složené z s kusů akcie a x kusů dluhopisu a se stejným výnosem jako opce, tj.

$$xS_u + b(1+r) = C_u := \max(0, S_u - K) = S_u - K, \quad xS_d + b(1+r) = C_d := \max(0, S_d - K) = 0$$

Řešením dostaneme x, b a **cenu opce dnes**: $C = xS_0 + b$

Oceňování opcí: ilustrace

- Mějme jednokrokový standardní model (tj. současná cena S_0 a budoucí cenou buď $S_u = US_0$ nebo $S_d = LS_0$ se stejnou pravděpodobností).
- call opci s realizační cenou K , ležící mezi US_0 a LS_0
- bezrizikový dluhopis s bezrizikovým výnosem $r + 1$.
- ? jaká je opční prémie?

Idea: koupit jako upisovatel v čase splatnosti portfolio složené z s kusů akcie a x kusů dluhopisu a se stejným výnosem jako opce, tj.

$$xS_u + b(1+r) = C_u := \max(0, S_u - K) = S_u - K, \quad xS_d + b(1+r) = C_d := \max(0, S_d - K) = 0$$

Řešením dostaneme x , b a **cenu opce dnes**: $C = xS_0 + b$

V případě u majitel opci uplatní, my mu ji koupíme, máme přesně na rozdíl mezi K a S_0 . V případě d majitel opci neuplatní, a hodnota našeho portfolia je 0. Hodnotu C musíme ale přem
naúčtovat držitelu

Black–Scholesův model a oceňování opcí*

Postup z minulého slajdu lze „protáhnout“ do času T a „zalimitit“. Výsledkem je ocenění opcí v ve spojitém modelu

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

kde μ — drift (průměrný růst), σ — volatilita, W_t — Wienerův proces.

Evropská call opce: Black–Scholesova formule

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \quad N \text{ je normální distribuční funkce}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Evropská put opce: $P_0 = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$.

Zajímavost: Nezávisí na μ .

- S blížící se splatnosti opce kopírují pozyby cen podkladového aktiva, proto se i ony používají ke spekulacím

- S blížící se splatnosti opce kopírují pozyby cen podkladového aktiva, proto se i ony používají ke spekulacím
- Pozorování přednášejícího: přinejmenším u emisních povolenek se obce téměř nepoužívají, narozdíl od futures.

Moneyneess opcí (ITM / ATM / OTM)

Moneyneess popisuje vztah mezi aktuální cenou podkladu S_t a strike cenou K .

Call opce (právo koupit):

- **ITM** (in the money): $S_t > K$
- **ATM** (at the money): $S_t = K$
- **OTM** (out of the money): $S_t < K$

Put opce (právo prodat):

- **ITM**: $S_t < K$
- **ATM**: $S_t = K$
- **OTM**: $S_t > K$

Příklad 8.3. Spotový kurz akcie je 100 a řídí se standardním modelem s $\mu = 3\%$, $\sigma = 8\%$. Bezriziková úroková míra je 1% na jednotku času. Cílem investora je zakoupit akcii v čase $T = 2$, přičemž do tohoto času nedisponuje vlastními prostředky na nákup; na jakékoli dřívější platby si musí vzít úvěr za bezrizikovou sazbu. Srovnejte střední hodnotu a směrodatnou odchylku platby v čase $T = 2$ v případě následujících strategií:

- nákup akcie v čase 0,
- nákup akcie v čase $T = 2$,
- uzavření forwardu na nákup akcie se splatností $T = 2$ a vypořádací cenou 103, s rizikem neuskutečnění 5% (stejně pro všechny scénáře vývoje akcie),
- koupě futures s kurzem 105 a se splatností $T = 2$, kdy požadovaný margin je 10%, udržovací (bezpečnostní) margin 6% (při poklesu pod něj je vyžadováno doplnění na 10%); futures se řídí standardním modelem se stejnými parametry jako akcie,
- koupě call opce se strike price $K = 100$ a opční premií $C = 5,5$.

Řešení.

Do času $T = 2$ existují tři scénáře vývoje ceny akcie:

Scénář	p	P_1	P_2	pP_2	pP_2^2
LL	0,25	95	90,25	22,56	2036,27
LU/UL	0,50	95 / 111	105,45	52,73	5559,85
UU	0,25	111	123,21	30,80	3795,18
sum	1,00			106,09	11391,29

1. Ve všech třech případech kupujeme akcii za 100, na což si půjčujeme, a v čase 2 budeme platit i s úroky

$$X_1 := -100 \times 1,01^2 \approx -102,01.$$

Jde o fixní číslo, takže $\mathbb{E}X_1 = X_1$ a $\sigma(X_1) = 0$.

Řešení.

Do času $T = 2$ existují tři scénáře vývoje ceny akcie:

Scénář	p	P_1	P_2	pP_2	pP_2^2
LL	0,25	95	90,25	22,56	2036,27
LU/UL	0,50	95 / 111	105,45	52,73	5559,85
UU	0,25	111	123,21	30,80	3795,18
sum	1,00			106,09	11391,29

2. Zde platíme náhodnou cenu v čase 2, tj. $X_2 = -P_2$ se

$$\mathbb{E}X_2 = -\mathbb{E}P_2 = -106,09$$

(viz tabulka) a $\sigma(X_2) = \sigma(P_2) \approx 11,67$ (spočítáno standardním způsobem, jen využijeme fakt, že $\sigma(X) = \sigma(-X)$).

Řešení.

3.* Tady přibývá další náhodnost: nedodržení dohody. V případě dodržení (D) platíme v čase 2 dohodnutou cenu 103. V případě nedodržení (N) platíme P_2 :

Scénář	p	P_2	X_3	pX_3	pX_3^2
D	0,95	•	-103	-97,85	10078,55
NLL	$0,25 \cdot 0,05 = 0,0125$	90,25	-90,25	-1,13	101,81
N(LU/UL)	$0,50 \cdot 0,05 = 0,0250$	105,45	-105,45	-2,64	277,99
NUU	$0,25 \cdot 0,05 = 0,0125$	123,21	-123,21	-1,54	189,76
sum	1,00			-103,16	10648,11

Tedy $\mathbb{E}X_3 \approx -103,16$ a z $E[X_3^2] - (\mathbb{E}X_3)^2$ dostaneme $\sigma(X_3) \approx 2,5$ (původních 2,70 je mírně nadhodnoceno).

Řešení.

4. V čase 0 musíme dodat margin $C_0 = 10,5$, splátka půjčky na něj v čase 2 činí $Y_0 = C_0 \times 1,01^2 \approx 10,71$. Futures v čase 1 buď klesne na $105 \times 0,95 = 99,75$ (margin klesne na 5,25), nebo vzroste na $105 \times 1,11 = 116,55$ (margin stoupne na 22,05).

V prvním případě margin klesl na cca 5,26 %, což je méně než 6 %, je tedy nutno doplnit margin na 10 % nové ceny, tj. na 9,975. Je tedy nutno doplnit $C_1 = 4,725$, což s úrokem na jedno období dává $Y_1 = C_1 \times 1,01 \approx 4,77$.

V čase 2 kupujeme za kurz futures 105; je nutno doplatit C_2 = rozdíl mezi kurzem a stavem účtu u burzy, na což si již nemusíme půjčovat, tedy $Y_2 = C_2$. Cashflow v čase 2 je pak $X_4 = -(Y_0 + Y_1 + Y_2)$.

Scénář	p	$C_0 (Y_0)$	$C_1 (Y_1)$	$C_2 (Y_2)$	$\sum C (\sum Y)$
L_F	0,5	10,5 (10,71)	4,725 (4,77)	89,775 (89,78)	105 (105,26)
U_F	0,5	10,5 (10,71)	0 (0)	94,5 (94,50)	105 (105,21)

Výpočtem zjistíme, že $\mathbb{E}X_4 \approx -105,24$, $\sigma(X_4) \approx 0,02$.

Řešení.

5. V čase 0 hradíme opční prémii $C_0 = 5,5$, na niž si bereme úvěr; úročená částka je

$$Y_0 = C_0 \times 1,01^2 \approx 5,611.$$

V čase 2 jsou tři možné ceny akcie: $P_2 = 90,25$ (LL) – v tomto případě kupujeme akcii za tržní cenu ($C_2 = Y_2 = 90,25$); dále $P_2 = 105,45$ (UL/LU), $P_2 = 123,21$ – v těchto případech využijeme opci a platíme $C_2 = Y_2 = 100$. Máme tedy:

Scénář	p	C_0 (Y_0)	C_2 (Y_2)	$\sum C$ ($\sum Y$)
OTM	0,25	5,5 (5,611)	90,25 (90,25)	95,75 (95,861)
ITM	0,75	5,5 (5,611)	100 (100)	105,5 (105,611)

Z čehož dostaneme

$$\mathbb{E}X_5 \approx -103,17, \quad \sigma(X_5) \approx 4,22.$$

Deriváty – Srovnání strategií

Strategie	Popis	$\mathbb{E}X$	$\sigma(X)$
1	Nákup akcie v čase 0	-102,01	0,00
2	Nákup akcie v čase $T = 2$	-106,09	11,67
3	Forward s rizikem nedodržení (5%)	-103,16	$\approx 2,5$
4	Futures s marginem	$\approx -105,24$	$\approx 0,02$
5	Call opce ($K = 100, C = 5,5$)	$\approx -103,17$	$\approx 4,22$

Poznámka: v tomto případě vycháze jako jednoznačně nejlepší řešení nákup akcie, ale to je dáno jejím (nerealistickým) růstem a nerealistickou úrokovou sazbou, za níž si lze půjčit.

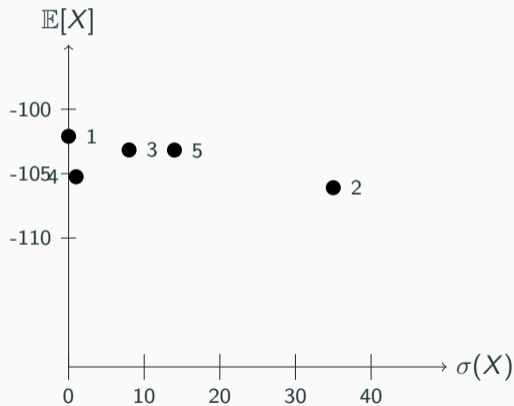
Deriváty – Srovnání strategií

Strategie	Popis	$\mathbb{E}X$	$\sigma(X)$
1	Nákup akcie v čase 0	-102,01	0,00
2	Nákup akcie v čase $T = 2$	-106,09	11,67
3	Forward s rizikem nedodržení (5%)	-103,16	$\approx 2,5$
4	Futures s marginem	$\approx -105,24$	$\approx 0,02$
5	Call opce ($K = 100, C = 5,5$)	$\approx -103,17$	$\approx 4,22$

Poznámka: v tomto případě vycháze jako jednoznačně nejlepší řešení nákup akcie, ale to je dáno jejím (nerealistickým) růstem a nerealistickou úrokovou sazbou, za níž si lze půjčit.

Poznámka: Srovnání je mírně nespravedlivé vůči opci, protože riziko (výchyly) jsou zde ve prospěch investora (levnější akcie),

Mean–risk graf:



Legenda: 1 = nákup nyní, 2 = nákup v T , 3 = forward s rizikem, 4 = futures, 5 = call opce.

Výběr portfolia

Motivace: Kombinací více aktiv lze snížit riziko portfolia, i když se nezmění jeho očekávaný výnos.

Motivace: Kombinací více aktiv lze snížit riziko portfolia, i když se nezmění jeho očekávaný výnos.

Ilustrace*: Nechtě R_1, R_2 jsou výnosy dvou aktiv s $r := \mathbb{E}R_1 = \mathbb{E}R_2$, $s := \sigma(R_1) = \sigma(R_2)$

- Pokud investujeme jednotku měny do jednoho z aktiv, bude střední výnos naší investice r a sm. odch. s .

Motivace: Kombinací více aktiv lze snížit riziko portfolia, i když se nezmění jeho očekávaný výnos.

Ilustrace*: Nechť R_1, R_2 jsou výnosy dvou aktiv s $r := \mathbb{E}R_1 = \mathbb{E}R_2$, $s := \sigma(R_1) = \sigma(R_2)$

- Pokud investujeme jednotku měny do jednoho z aktiv, bude střední výnos naší investice r a sm. odch. s .
- Pokud investujeme polovinu do jednoho a polovinu do druhého aktiva, bude výnos opět r , ale směrodatná odchylka bude rovna

$$s_{1/2} = s\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \rho)},$$

kde ρ je korelace* (veličina s hodnotou v $[-1, 1]$, blíží se 1, pokud se výnosy chovají „podobně“, nebo -1 , pokud „jdou proti sobě“, viz kurs pravděpodobnosti).

Motivace: Kombinací více aktiv lze snížit riziko portfolia, i když se nezmění jeho očekávaný výnos.

Ilustrace*: Nechť R_1, R_2 jsou výnosy dvou aktiv s $r := \mathbb{E}R_1 = \mathbb{E}R_2$, $s := \sigma(R_1) = \sigma(R_2)$

- Pokud investujeme jednotku měny do jednoho z aktiv, bude střední výnos naší investice r a sm. odch. s .
- Pokud investujeme polovinu do jednoho a polovinu do druhého aktiva, bude výnos opět r , ale směrodatná odchylka bude rovna

$$s_{1/2} = s\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \rho)},$$

kde ρ je korelace* (veličina s hodnotou v $[-1, 1]$, blíží se 1, pokud se výnosy chovají „podobně“, nebo -1 , pokud „jdou proti sobě“, viz kurs pravděpodobnosti).

- Dosazením $\rho = 1$ zjistíme, že $s_{1/2} = s$ (žádná diverzifikace), dosazením $\rho = 0$ pak $s_{1/2} = s/\sqrt{2}$ (riziko se snižuje), a při $\rho = -1$ a stejných s může celkové riziko jít až k nule

Výběr portfolia

Portfolio = soubor různých investic (akcie, dluhopisy, deriváty, komodity...).

Máme m aktiv s relativním výnosem R_1, \dots, R_m . Bez újmy obecnosti předpokládejme jednotkovou investici. Složení portfolia je dáno váhami $w = (w_1, \dots, w_m)$, $\sum w_i = 1$.

Výběr portfolia

Portfolio = soubor různých investic (akcie, dluhopisy, deriváty, komodity...).

Máme m aktiv s relativním výnosem R_1, \dots, R_m . Bez újmy obecnosti předpokládejme jednotkovou investici. Složení portfolia je dáno váhami $w = (w_1, \dots, w_m)$, $\sum w_i = 1$.

Pokud není umožněno půjčování aktiv (= krátké prodeje, short sells), musí platit $w_i \geq 0 \forall i$.

Výběr portfolia

Portfolio = soubor různých investic (akcie, dluhopisy, deriváty, komodity...).

Máme m aktiv s relativním výnosem R_1, \dots, R_m . Bez újmy obecnosti předpokládejme jednotkovou investici. Složení portfolia je dáno váhami $w = (w_1, \dots, w_m)$, $\sum w_i = 1$.

Pokud není umožněno půjčování aktiv (= krátké prodeje, short sells), musí platit $w_i \geq 0 \forall i$.

Dvě kritéria:

- maximalizace středního výnosu $\mathbb{E}R = \mathbb{E} \sum_i w_i R_i = \sum_i w_i \mathbb{E}R_i$.
- současně minimalizace rizika $\rho(R)$, kde ρ je nějaká míra rizika.
 - pokud ρ je směrodatná odchylka, pak $\sigma(R) = \sqrt{w^T V w}$ kde V je kovarianční matice vektoru R (viz budoucí studium)*
 - Pokud jsou výnosy nezávislé* (nerealistický předpoklad), pak

$$\text{var}(R) = \sum_i w_i^2 \text{var}(R_i) \quad \Rightarrow \quad \sigma(R) = \sqrt{\sum_i w_i^2 \text{var}(R_i)}$$

Přístupy k výběru portfolia

- Mean-Risk:

maximalizovat $(1 - \lambda)\mathbb{E}R - \lambda\rho(R)$,

kde $0 \leq \lambda \leq 1$ je parametr rizikové averze.

Přístupy k výběru portfolia

- Mean-Risk:

maximalizovat $(1 - \lambda)\mathbb{E}R - \lambda\rho(R)$,

kde $0 \leq \lambda \leq 1$ je parametr rizikové averze.

- Koherentní míra rizika:

minimalizovat $\rho(-R)$

(díky translační invarianci a monotonicitě zohledňuje i výnos)

Přístupy k výběru portfolia

- Mean-Risk:

maximalizovat $(1 - \lambda)\mathbb{E}R - \lambda\rho(R)$,

kde $0 \leq \lambda \leq 1$ je parametr rizikové averze.

- Koherentní míra rizika:

minimalizovat $\rho(-R)$

(díky translační invarianci a monotonicitě zohledňuje i výnos)

- Přes užitkovou funkci:

maximalizovat $\mathbb{E}u(R)$

Přístupy k výběru portfolia

- Mean-Risk:

maximalizovat $(1 - \lambda)\mathbb{E}R - \lambda\rho(R)$,

kde $0 \leq \lambda \leq 1$ je parametr rizikové averze.

- Koherentní míra rizika:

minimalizovat $\rho(-R)$

(díky translační invarianci a monotonicitě zohledňuje i výnos)

- Přes užitkovou funkci:

maximalizovat $\mathbb{E}u(R)$

- Konstrukce efektivní hranice: pro každou možnou hodnotu $\mathbb{E}R$ se hledá portfolio s minimálním rizikem:

$\forall r$: minimalizovat $\mathbb{E}R=r \rho(R)$

Nejjednodušší příklad – bezrizikové a rizikové aktivum

Mějme bezrizikové aktivum s výnosem $r_f \geq 1$ a rizikové aktivum s náhodným výnosem R_1 s $\mathbb{E}R_1 = \mu > r_f$ a $\sigma(R_1) = s$.

Nejjednodušší příklad – bezrizikové a rizikové aktivum

Mějme bezrizikové aktivum s výnosem $r_f \geq 1$ a rizikové aktivum s náhodným výnosem R_1 s $\mathbb{E}R_1 = \mu > r_f$ a $\sigma(R_1) = s$.

Portfolio je jednoznačně určeno váhou w rizikového aktiva (druhá váha je $1 - w$).

Nejjednodušší příklad – bezrizikové a rizikové aktivum

Mějme bezrizikové aktivum s výnosem $r_f \geq 1$ a rizikové aktivum s náhodným výnosem R_1 s $\mathbb{E}R_1 = \mu > r_f$ a $\sigma(R_1) = s$.

Portfolio je jednoznačně určeno váhou w rizikového aktiva (druhá váha je $1 - w$).

$$\mathbb{E}R = (1 - w)r_f + w\mu, \quad \sigma(R) = ws$$

Nejjednodušší příklad – bezrizikové a rizikové aktivum

Mějme bezrizikové aktivum s výnosem $r_f \geq 1$ a rizikové aktivum s náhodným výnosem R_1 s $\mathbb{E}R_1 = \mu > r_f$ a $\sigma(R_1) = s$.

Portfolio je jednoznačně určeno váhou w rizikového aktiva (druhá váha je $1 - w$).

$$\mathbb{E}R = (1 - w)r_f + w\mu, \quad \sigma(R) = ws$$

Přístup mean-risk (se směrodatnou odchylkou):

$$\max_{0 \leq w \leq 1} [(1 - \lambda)\mathbb{E}R - \lambda\sigma(R)] = \max_{0 \leq w \leq 1} [(1 - \lambda)((1 - w)r_f + w\mu) - \lambda ws] = \max_{0 \leq w \leq 1} (aw + b),$$

$$a = (1 - \lambda)(\mu - r_f) - \lambda s.$$

Hledáme maximum lineární funkce \Rightarrow v závislosti na λ nastane buď na nejmenší či největší možné hodnotě w (tj. vše do rizikového aktiva nebo vše do bezrizikového).

Nejjednodušší příklad – bezrizikové a rizikové aktivum

Mějme bezrizikové aktivum s výnosem $r_f \geq 1$ a rizikové aktivum s náhodným výnosem R_1 s $\mathbb{E}R_1 = \mu > r_f$ a $\sigma(R_1) = s$.

Portfolio je jednoznačně určeno váhou w rizikového aktiva (druhá váha je $1 - w$).

$$\mathbb{E}R = (1 - w)r_f + w\mu, \quad \sigma(R) = ws$$

Koherentní míra rizika:

$$\min_{0 \leq w \leq 1} \rho(-[(1 - w)r_f + wR_1]) = \min_{0 \leq w \leq 1} (-(1 - w)r_f + w \rho(-R_1)) = \min_{0 \leq w \leq 1} (aw + b),$$

kde $a = r_f + \rho(-R_1)$, $b = -r_f$. Opět lineární funkce, tedy podobný případ.

Nejjednodušší příklad – bezrizikové a rizikové aktivum

Mějme bezrizikové aktivum s výnosem $r_f \geq 1$ a rizikové aktivum s náhodným výnosem R_1 s $\mathbb{E}R_1 = \mu > r_f$ a $\sigma(R_1) = s$.

Portfolio je jednoznačně určeno váhou w rizikového aktiva (druhá váha je $1 - w$).

$$\mathbb{E}R = (1 - w)r_f + w\mu, \quad \sigma(R) = ws$$

Užitková funkce: Nechť u je striktně konkávní.

$$\max_{0 \leq w \leq 1} \mathbb{E} u(R) = \max_{0 \leq w \leq 1} \mathbb{E} u((1 - w)r_f + wR_1) = \max_{0 \leq w \leq 1} U(w),$$

$$U(w) = \mathbb{E} u(w(R_1 - r_f) + r_f).$$

Protože $U(w)$ je striktně konkávní, má jednoznačné maximum, které může nastat kdekoli v $[0, 1]$.

Nejjednodušší příklad – bezrizikové a rizikové aktivum

Mějme bezrizikové aktivum s výnosem $r_f \geq 1$ a rizikové aktivum s náhodným výnosem R_1 s $\mathbb{E}R_1 = \mu > r_f$ a $\sigma(R_1) = s$.

Portfolio je jednoznačně určeno váhou w rizikového aktiva (druhá váha je $1 - w$).

$$\mathbb{E}R = (1 - w)r_f + w\mu, \quad \sigma(R) = ws$$

Efektivní hranice: Střední výnos $\mathbb{E}R = (1 - w)r_f + w\mu$ může nabývat hodnot právě v intervalu $[r_f, \mu]$. Pro každý požadovaný výnos r je portfolio určeno jednoznačně

$$w_r = \frac{r - r_f}{\mu - r_f}.$$

Označme R_r výnos portfolia s $\mathbb{E}R_r = r$. Pokud $\rho = \sigma$, pak $\sigma(R_r) = w_r s$, takže efektivní hranice je úsečka.

Jednoduchý příklad – dvě riziková aktiva (nezávislá)

Mějme dvě riziková aktiva s výnosy R_1, R_2 , pro které platí:

$\mathbb{E}R_1 = \mu_1$, $\mathbb{E}R_2 = \mu_2$, $\sigma(R_1) = s_1$, $\sigma(R_2) = s_2$, a předpokládejme, že jsou **nezávislá**, tedy $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$.

Jednoduchý příklad – dvě riziková aktiva (nezávislá)

Mějme dvě riziková aktiva s výnosy R_1, R_2 , pro které platí:

$\mathbb{E}R_1 = \mu_1$, $\mathbb{E}R_2 = \mu_2$, $\sigma(R_1) = s_1$, $\sigma(R_2) = s_2$, a předpokládejme, že jsou **nezávislá**, tedy $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$.

Portfolio je jednoznačně určeno vahou w prvního rizikového aktiva (druhé má váhu $1 - w$).

Jednoduchý příklad – dvě riziková aktiva (nezávislá)

Mějme dvě riziková aktiva s výnosy R_1, R_2 , pro které platí:

$\mathbb{E}R_1 = \mu_1$, $\mathbb{E}R_2 = \mu_2$, $\sigma(R_1) = s_1$, $\sigma(R_2) = s_2$, a předpokládejme, že jsou **nezávislá**, tedy $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$.

Portfolio je jednoznačně určeno vahou w prvního rizikového aktiva (druhé má váhu $1 - w$).

Střední výnos portfolia: $\mathbb{E}R = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2$, variance portfolia (při nezávislosti):
 $\sigma^2(R) = w^2s_1^2 + (1 - w)^2s_2^2$.

Jednoduchý příklad – dvě riziková aktiva (nezávislá)

Mějme dvě riziková aktiva s výnosy R_1, R_2 , pro které platí:

$\mathbb{E}R_1 = \mu_1$, $\mathbb{E}R_2 = \mu_2$, $\sigma(R_1) = s_1$, $\sigma(R_2) = s_2$, a předpokládejme, že jsou **nezávislá**, tedy $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$.

Portfolio je jednoznačně určeno vahou w prvního rizikového aktiva (druhé má váhu $1 - w$).

Střední výnos portfolia: $\mathbb{E}R = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2$, variance portfolia (při nezávislosti):
 $\sigma^2(R) = w^2s_1^2 + (1 - w)^2s_2^2$.

Jednoduchý příklad – dvě riziková aktiva (nezávislá)

Mějme dvě riziková aktiva s výnosy R_1, R_2 , pro které platí:

$\mathbb{E}R_1 = \mu_1$, $\mathbb{E}R_2 = \mu_2$, $\sigma(R_1) = s_1$, $\sigma(R_2) = s_2$, a předpokládejme, že jsou **nezávislá**, tedy $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$.

Portfolio je jednoznačně určeno vahou w prvního rizikového aktiva (druhé má váhu $1 - w$).

Střední výnos portfolia: $\mathbb{E}R = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2$, variance portfolia (při nezávislosti):
 $\sigma^2(R) = w^2s_1^2 + (1 - w)^2s_2^2$.

Přístup mean–risk:

$$\max_{0 \leq w \leq 1} \left[(1 - \lambda) \mathbb{E}R - \lambda \sigma(R) \right],$$

vede na optimalizaci nelineární funkce w (kvadratický vztah pro $\sigma^2(R)$ a odmocnina v $\sigma(R)$). Optimum už **nemusí být** jen na krajích, může ležet uvnitř $(0, 1)$.

Jednoduchý příklad – dvě riziková aktiva (nezávislá)

Mějme dvě riziková aktiva s výnosy R_1, R_2 , pro které platí:

$\mathbb{E}R_1 = \mu_1$, $\mathbb{E}R_2 = \mu_2$, $\sigma(R_1) = s_1$, $\sigma(R_2) = s_2$, a předpokládejme, že jsou **nezávislá**, tedy $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$.

Portfolio je jednoznačně určeno vahou w prvního rizikového aktiva (druhé má váhu $1 - w$).

Střední výnos portfolia: $\mathbb{E}R = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2$, variance portfolia (při nezávislosti):
 $\sigma^2(R) = w^2s_1^2 + (1 - w)^2s_2^2$.

Užitková funkce:

$$\max_{0 \leq w \leq 1} \mathbb{E} u(wR_1 + (1 - w)R_2),$$

s konkávním užitekem u má (díky striktní konkávnosti) jednoznačné řešení, ať už uvnitř nebo na okraji intervalu $[0, 1]$.

Jednoduchý příklad – dvě riziková aktiva (nezávislá)

Mějme dvě riziková aktiva s výnosy R_1, R_2 , pro které platí:

$\mathbb{E}R_1 = \mu_1$, $\mathbb{E}R_2 = \mu_2$, $\sigma(R_1) = s_1$, $\sigma(R_2) = s_2$, a předpokládejme, že jsou **nezávislá**, tedy $\text{cov}(R_1, R_2) = 0$.

Portfolio je jednoznačně určeno vahou w prvního rizikového aktiva (druhé má váhu $1 - w$).

Střední výnos portfolia: $\mathbb{E}R = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2$, variance portfolia (při nezávislosti):
 $\sigma^2(R) = w^2s_1^2 + (1 - w)^2s_2^2$.

Efektivní hranice:

Pro každý požadovaný výnos $r = w\mu_1 + (1 - w)\mu_2 \in [\min(\mu_1, \mu_2), \max(\mu_1, \mu_2)]$ je váha jednoznačná: $w_r = \frac{r - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$.

Po dosazení do $\sigma^2(R)$ dostaneme $\sigma^2(R_r) = w_r^2s_1^2 + (1 - w_r)^2s_2^2$, tedy efektivní hranice je (pro dvě nezávislá riziková aktiva) hladký **oblouk** v rovině $(\sigma, \mathbb{E}R)$.

Mean–risk kritérium :

$$\max_{0 \leq w \leq 1} J(w),$$

$$J(w) = (1 - \lambda) \mathbb{E}R - \lambda \sigma(R) = (1 - \lambda)(w\mu_1 + (1 - w)\mu_2) - \lambda \sqrt{w^2 s_1^2 + (1 - w)^2 s_2^2}.$$

Mean–risk kritérium :

$$\max_{0 \leq w \leq 1} J(w),$$

$$J(w) = (1 - \lambda) \mathbb{E}R - \lambda \sigma(R) = (1 - \lambda)(w\mu_1 + (1 - w)\mu_2) - \lambda \sqrt{w^2 s_1^2 + (1 - w)^2 s_2^2}.$$

J je diferencovatelná, optimum nalezneme položením derivace nule.

$$0 = J'(w) = (1 - \lambda)(\mu_1 - \mu_2) - \lambda \frac{ws_1^2 - (1 - w)s_2^2}{\sqrt{w^2 s_1^2 + (1 - w)^2 s_2^2}}$$

Mean–risk kritérium :

$$\max_{0 \leq w \leq 1} J(w),$$

$$J(w) = (1 - \lambda) \mathbb{E}R - \lambda \sigma(R) = (1 - \lambda)(w\mu_1 + (1 - w)\mu_2) - \lambda \sqrt{w^2 s_1^2 + (1 - w)^2 s_2^2}.$$

J je diferencovatelná, optimum nalezneme položením derivace nule.

$$0 = J'(w) = (1 - \lambda)(\mu_1 - \mu_2) - \lambda \frac{ws_1^2 - (1 - w)s_2^2}{\sqrt{w^2 s_1^2 + (1 - w)^2 s_2^2}}$$

$$J'(w^*) = 0 \iff (1 - \lambda)(\mu_1 - \mu_2) = \lambda \frac{w^* s_1^2 - (1 - w^*) s_2^2}{\sqrt{(w^*)^2 s_1^2 + (1 - w^*)^2 s_2^2}}.$$

Mean–risk kritérium :

$$\max_{0 \leq w \leq 1} J(w),$$

$$J(w) = (1 - \lambda) \mathbb{E}R - \lambda \sigma(R) = (1 - \lambda)(w\mu_1 + (1 - w)\mu_2) - \lambda \sqrt{w^2 s_1^2 + (1 - w)^2 s_2^2}.$$

J je diferencovatelná, optimum nalezneme položením derivace nule.

$$0 = J'(w) = (1 - \lambda)(\mu_1 - \mu_2) - \lambda \frac{ws_1^2 - (1 - w)s_2^2}{\sqrt{w^2 s_1^2 + (1 - w)^2 s_2^2}}$$

$$J'(w^*) = 0 \iff (1 - \lambda)(\mu_1 - \mu_2) = \lambda \frac{w^* s_1^2 - (1 - w^*) s_2^2}{\sqrt{(w^*)^2 s_1^2 + (1 - w^*)^2 s_2^2}}.$$

Nutno hledat numericky (například půlením intervalu). J je konkávní \Rightarrow stačí hledat jeden kořen w^* . Pokud vyjde mimo $[0, 1]$, optimum bude nejbližší krajní bod intervalu.

Základ teorie CAPM: Sharpe–Lintner–Mossin

Cíl teorie: Popis tržní rovnováhy

Předpoklady:

- Investoři maximalizují **očekávaný užitek** ze své konečné spotřeby/bohatství:

$$\max \mathbb{E}[u(R)], \quad u' > 0, \quad u'' < 0, \quad U(R) = \mathbb{E}u(R) \text{ závisí pouze na } \mathbb{E}R \text{ a } \sigma(R).$$

- Existuje **bezrizikové aktivum** s úrokem r_f , dostupné pro půjčky i vklady.
- Neexistují transakční náklady, žádné daně, žádná omezení na velikost či znaménko pozice.
- Všechna aktiva jsou **volně obchodovatelná**, dokonale dělitelná.

Základ teorie CAPM: Sharpe–Lintner–Mossin

Cíl teorie: Popis tržní rovnováhy

Předpoklady:

- Investoři maximalizují **očekávaný užitek** ze své konečné spotřeby/bohatství:

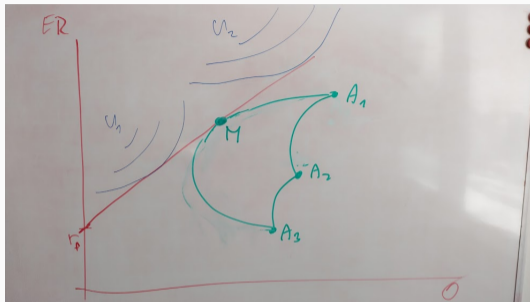
$$\max \mathbb{E}[u(R)], \quad u' > 0, \quad u'' < 0, \quad U(R) = \mathbb{E}u(R) \text{ závisí pouze na } \mathbb{E}R \text{ a } \sigma(R).$$

- Existuje **bezrizikové aktivum** s úrokem r_f , dostupné pro půjčky i vklady.
- Neexistují transakční náklady, žádné daně, žádná omezení na velikost či znaménko pozice.
- Všechna aktiva jsou **volně obchodovatelná**, dokonale dělitelná.

Mutual Fund Theorem:

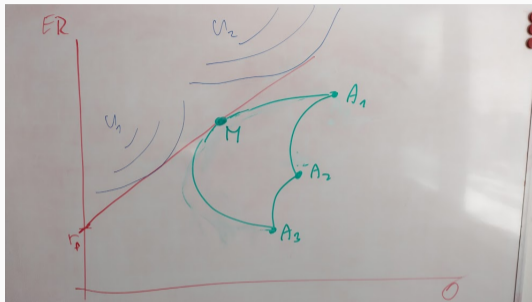
- Všichni investoři, bez ohledu na tvar $u(\cdot)$, drží **stejně optimální rizikové portfolio** M .
- Liší se jen volbou mixu mezi M a bezrizikovým aktivem.

„Důkaz“ FPT



- Zelený „dešťník“ – všechna možná portfolia, A_1, A_2, A_3 – jednotlivá aktiva.
- Modré „vrstevnice“ – spojují body se stejným $\mathbb{E}R$ a $\sigma(R)$, mezi kterými je daný investor indiferentní (U rostou severozápadně).
- červená polopřímka: množina dominujících portfolií (kombinací bezrizikového aktiva a M).

„Důkaz“ FPT



- Zelený „deštník“ – všechna možná portfolia, A_1, A_2, A_3 – jednotlivá aktiva.
 - Modré „vrstevnice“ – spojují body se stejným $\mathbb{E}R$ a $\sigma(R)$, mezi kterými je daný investor indiferentní (U rostou severozápadně).
 - červená polopřímka: množina dominujících portfolií (kombinací bezrizikového aktiva a M).
- ⇒ Všichni drží stejné rizikové portfolio \approx index ETF.

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Ze SLM vyplývá CAPM (odvození příští ročník)

Autoři:

- **William F. Sharpe** (1964) – hlavní formulace, Nobelova cena 1990.
- Nezávislé příspěvky: **Lintner** (1965), **Mossin** (1966).

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Ze SLM vyplývá CAPM (odvození příští ročník)

Autoři:

- **William F. Sharpe** (1964) – hlavní formulace, Nobelova cena 1990.
- Nezávislé příspěvky: **Lintner** (1965), **Mossin** (1966).

Hlavní implikace:

$$R_i = r_f + \beta_i \underbrace{(R_M - r_f)}_{\substack{\text{systematické riziko} \\ \text{(nelze diverzifikovat)}}} + \underbrace{\epsilon_i}_{\substack{\text{specifické riziko} \\ \text{(lze diverzifikovat)}}, \quad \beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)}.$$

CAPM – Capital Asset Pricing Model

Ze SLM vyplývá CAPM (odvození příští ročník)

Autoři:

- **William F. Sharpe** (1964) – hlavní formulace, Nobelova cena 1990.
- Nezávislé příspěvky: **Lintner** (1965), **Mossin** (1966).

Hlavní implikace:

$$R_i = r_f + \beta_i \underbrace{(R_M - r_f)}_{\substack{\text{systematické riziko} \\ \text{(nelze diverzifikovat)}}} + \underbrace{\epsilon_i}_{\substack{\text{specifické riziko} \\ \text{(lze diverzifikovat)}}, \quad \beta_i = \frac{\text{Cov}(R_i, R_M)}{\text{Var}(R_M)}.$$

⇒

$$\mathbb{E}R_i = r_f + \beta_i(\mathbb{E}R_M - r_f),$$

(střední výnos závisí na výnosu M (tržního portfolia) a β_i – „citlivosti na výkyvy“).

DP 4

4. DP

Cena akcie je S . Dále jsou na trhu opce call se strike cenou K a opční premií c , put opce se strike K a opční premií p a futures s cenou F . Všechny deriváty mají splatnost v čase 1. Úrok, na který si lze půjčit, je 5%. Cena akcie v čase 1 se vyvíjí podle následujících možných scénářů:

scénář	S_1	p
1	130	0.1
2	120	0.15
3	110	0.25
4	100	0.25
5	90	0.15
6	80	0.1

4. DP

1. Načrtněte graf výnosu opční strategie *straddle*, která spočívá v současném nákupu put a call opce (v tomto případě s výše zmíněnými parametry). Označte souřadnicemi body grafu odpovídající scénářům 1 a 6 a bod odpovídající případnému bodu zlomu grafu.

4. DP

2. Předpokládejme, že investor bude mít k dispozici vlastní finanční prostředky až v čase 1. Jaká je nejvyšší úroková míra, při níž se vyplatí nákup akcie za půjčené prostředky oproti „nákupu“ futures. U futures je nutno vložit v čase 0 margin 20 %, který je nutno financovat též formou úvěru. Předpokládejme, že po celou dobu do splatnosti nenastane výzva k navýšení. Výsledek uveďte na dvě desetinná místa.

4. DP

3. Vypočítejte střední hodnotu a směrodatnou odchylku relativního výnosu (tj. výnosu z investované jednotky měny) následujících strategií:

1. nákup akcie v čase 0 její prodej v čase 1.
2. „nákup“ futures v čase 0 a inkaso zisku v čase jedna, přičemž „nákupem“ se rozumí vstup do futures kontraktu spojený s vložením prostředků do marginu (20% ceny futures). Náповěda: začněte s výpočtem výnosu z jedné futures, pak zjistěte, kolik futures můžete z jednotky měny financovat.
3. nákup výše uvedené put opce a inkaso případného rozdílu oproti ceně akcie.

Předpokládáme neomezenou dělitelnost všech aktiv. Neuvažujte žádné úročení ani diskontování. Výsledky na dvě desetinná místa vepište do jedné tabulky. Poznámka: výnosem se rozumí částka, o níž se investovaná jednotka zvýší (může být i záporný), nikoli koeficient, kterým se násobí. Náповěda: použijte vztahy $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}X + b$ a $\sigma(aX + b) = a\sigma(X)$.

Základy životního pojištění

Úmrtnostní tabulky (Life Tables)

- Základní demografický a aktuárský nástroj.
- Popisují úmrtnost a přežívání v populaci.
- Vytvářejí standardizované veličiny:
 - pravděpodobnost úmrtí q_x ,
 - pravděpodobnost přežití p_x ,
 - počet dožívajících l_x ,
 - očekávané roky života e_x .
- Použití: penzijní systémy, sociální pojištění, životní pojištění.

Základní struktura úmrtnostní tabulky

- Tabulka je indexovaná věkem $x = 0, 1, 2, \dots, \omega$.
- Pro každý věk obsahuje:
 - počet dožívajících l_x ,
 - počet zemřelých d_x ,
 - pravděpodobnost úmrtí q_x ,
 - pravděpodobnost přežití p_x ,
 - počet prožitých let L_x ,
 - celkový počet budoucích let T_x ,
 - očekávanou dobu života e_x .
- Početní základ: obvykle $l_0 = 100\,000$.

1923 CZ Česká republika

Ženy Females									
věk (x) age	D_x	P_x	m_x	q_x	l_x	d_x	L_x	T_x	e_x
0	14391	106960	0,134546	0,120013	100000	12001	89199	5585884	55,86
1	1728	103479	0,016420	0,016286	87999	1433	87282	5496685	62,46
2	576	102982	0,006158	0,006139	86566	531	86300	5409403	62,49
3	405	88379	0,004007	0,003999	86034	344	85862	5323103	61,87
4	171	60476	0,003039	0,003034	85690	260	85560	5237241	61,12
5	104	46326	0,002500	0,002497	85430	213	85323	5151681	60,30
6	116	49584	0,002156	0,002154	85217	184	85125	5066357	59,45
7	128	62810	0,001910	0,001908	85033	162	84952	4981232	58,58
8	135	86448	0,001738	0,001737	84871	147	84797	4896280	57,69
9	162	101814	0,001627	0,001626	84724	138	84655	4811483	56,79

- Primární
 - l_x — počet dožívajících se věku x (platí $l_0 > l_1 > \dots > l_\omega$). Obvykle $l_0 = 100\,000$.
- Odvozené
 - $d_x = l_x - l_{x+1}$ — počet zemřelých mezi věky x a $x + 1$.
 - $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ — pravděpodobnost úmrtí ve věku x .
 - $p_x = 1 - q_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$ — pravděpodobnost přežití.

Počet prožitých let: L_x

- L_x = celkový počet „člověko-roků“ prožitých kohortou ve věku x .
- Přibližný vzorec:

$$L_x \approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}.$$

- T_x — celkový počet budoucích let života:

$$T_x = L_x + L_{x+1} + L_{x+2} + \dots$$

- Definice:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}.$$

- Interpretace:
 - očekávaný počet let, které má osoba ve věku x ještě před sebou,
 - u věku $x = 0$ označováno jako „střední délka života při narození“.
- Typicky klesá s věkem, ale v reálu se mohou vyskytovat anomálie (úmrtnost kojenců).

Rekapitulace: základní identické vztahy UT

$$\begin{aligned}d_x &= l_x - l_{x+1}, & q_x &= \frac{d_x}{l_x}, & p_x &= 1 - q_x, \\L_x &\approx \frac{l_x + l_{x+1}}{2}, & T_x &= \sum_{k=x}^{\omega} L_k, & e_x &= \frac{T_x}{l_x}.\end{aligned}$$

- Funkce l_x klesá od l_0 k 0 – přeživší z počáteční kohorty.
- d_x odpovídá „spádu“ křivky – šířka mezi l_x a l_{x+1} .
- $L_x =$ plocha pásu mezi x a $x + 1$ pod funkcí l_x .
- $T_x =$ plocha pod křivkou od x dál.
- $e_x =$ průměrná plocha v jednom „člověku“.

- Úmrtnostní tabulky jsou základem:
 - kalkulací důchodů a penzí,
 - oceňování životního pojištění,
 - kalkulací pojistného,
 - měření zdravotního stavu populace.
- Rozdíly dle pohlaví, regionu, socioekonomického statusu.
- Extrémní roky (např. pandemie) výrazně mění UT.

Příklad konstrukce jednoduché UT

x	l_x	d_x	q_x	p_x	e_x
0	100000	500	0.0050	0.9950	78.6
1	99500	50	0.0005	0.9995	77.8
2	99450	30	0.0003	0.9997	76.8
⋮					

- Z hodnot q_x a l_0 lze dopočítat všechny ostatní veličiny.

- Úmrtnostní tabulky jsou základním modelem přežití.
- Odvozené veličiny (L_x , T_x , e_x) mají jasnou demografickou interpretaci.
- UT tvoří základ finanční matematiky života: životní pojištění, důchody, rezervy, komutační funkce.
- Přístupné na stránkách statistického úřadu
<https://csu.gov.cz/produkty/umrtnostni-tabulky-5i3aadd1z7>

Úmrtnost a její role v pojištění

- Úmrtnost je klíčová pro životní pojištění, důchodové pojištění i penzijní systémy.
- V pojištění typicky platí rozdíly:

$$q_x^M > q_x^{\text{ž}}$$

(muži mají vyšší úmrtnost než ženy).

- Některé rozdíly byly regulovány — např. rozsudek Soudního dvora EU zakazující genderové znevýhodnění v pojištění.
- Úmrtnost v ČR: dlouhodobý pokles, přerušovaný pandemií.

Pro osoby ve věku x :

- q_x — pravděpodobnost úmrtí v následujícím roce života,
- p_x — pravděpodobnost přežití následujícího roku života,
- ${}_nq_x$ — pravděpodobnost úmrtí do n let,
- ${}_np_x$ — pravděpodobnost přežití n let,

Situace

Pár: muž ve věku x , žena ve věku y .

- Základ: individuální životní tabulky.
- Ideální hypotéza: nezávislost úmrtnosti obou osob.
- Potom:

$$p_{x,y} := p_x \cdot p_y, \quad q_{x,y} = 1 - p_x p_y.$$

- Pozn.: V realitě může existovat závislost (společná rizika), ale v praxi se často zanedbává.

Příklad: pravděpodobnost, že oba manželé přežijí 20 let

Příklad 11.1. Muž věk $x = 35$, žena věk $y = 30$. Jaká je pravděpodobnost, že oba přežijí $n = 20$ let? Máme k dispozici UT mužů a žen.

Řešení.

- Individuální pravděpodobnosti přežití:

$${}_{20}p_{35}^M = \frac{l_{55}^M}{l_{35}^M}, \quad {}_{20}p_{30}^{\check{z}} = \frac{l_{50}^{\check{z}}}{l_{30}^{\check{z}}}.$$

- Při nezávislosti:

$$p_{\text{oba přežijí 20 let}} = {}_{20}p_{35}^M \cdot {}_{20}p_{30}^{\check{z}}.$$

Příklad: pravděpodobnost ovdovění

Příklad 11.2. Muž věk $x = 35$, žena věk $y = 30$. Jaká je pravděpodobnost, že bude žena za 20 let naživu a současně vdovou? Máme k dispozici UT mužů a žen (nepočítáme s rozvodem).

Řešení. Tato neblahá okolnost nastane právě tehdy, pokud žena 20 let přežije, na rozdíl od manžela:

$${}_{20}q_{35}^M = 1 - \frac{l_{55}^M}{l_{35}^M}, \quad {}_{20}p_{30}^{\check{Z}} = \frac{l_{50}^{\check{Z}}}{l_{30}^{\check{Z}}}.$$

Při předpokladu nezávislosti:

$$p = {}_{20}q_{35}^M \cdot {}_{20}p_{30}^{\check{Z}}.$$

Základní typy ŽP

- **Rizikové ŽP**
 - kryje riziko smrti pojištěného v pojistné době,
 - bez spořicí složky (žádné plnění při dožití).
- **Důchodové ŽP**
 - výplata renty (důchodu) při dožití určitého věku,
 - může obsahovat i krytí pro případ smrti.
- **Smíšené ŽP**
 - kombinace pojištění pro případ smrti a dožití,
 - typicky jednorázové plnění při dožití.

- **Kapitálové / investiční ŽP**
 - kombinace pojistné ochrany a spoření/investic,
 - investice do fondů (unit-linked).
- **Flexibilní ŽP**
 - možnost měnit pojistnou částku a výši pojistného v čase,
 - reaguje na změny finanční situace klienta.
- **Doplňková pojištění**
 - kritická onemocnění, dlouhodobá péče (long-term care),
 - invalidita, trvalé následky úrazu apod.

Příklad: sjednání životního pojištění

Uvažujme osobu, která chce sjednat ŽP na dobu 20 let s pojistnou částkou 100 000 Kč.

- Jaké jsou typické varianty produktu?
 1. **Rizikové ŽP** – plnění pouze při smrti v pojistné době (100 000 Kč).
 2. **Smíšené ŽP** – plnění 100 000 Kč při smrti nebo při dožití doby 20 let.
 3. **Důchodové ŽP** – přeměna pojistné částky na důchod po dožití určitého věku.
- Volba závisí na cíli klienta: ochrana rodiny vs. spoření nebo příprava na důchod.

- **Jednorázové pojistné**
 - placeno při sjednání pojistné smlouvy,
 - používá se např. u jednorázových investičních produktů.
- **Běžné pojistné**
 - placeno periodicky (měsíčně, ročně, ...),
 - výše se může měnit (indexace, úprava krytí).
- **Netto pojistné**
 - „spravedlivé“ pojistné, kdy obě strany mají střední nulový zisk,
 - stanoveno aktuársky podle principu ekvivalence (viz dále),
- **Brutto pojistné**
 - netto pojistné + správní náklady + zisk + rezervy.

Zajištění (reinsurance)

- Mechanismus, kterým pojišťovna předává část pojistných rizik jiné společnosti — zajistiteli.
- Cíl: snížení rizika velkých škod, stabilizace portfolia, omezení kapitálových požadavků.
- Typičtí zajistitelé: Swiss Re, Munich Re.

Princip ekvivalence (PE)

Základní idea

Základní princip určení pojistného

$\mathbb{E}PV$ přijatého pojistného = $\mathbb{E}PV$ očekávaného pojistného plnění.

(nikdo nevydělává)

- Používá se k výpočtu *netto pojistného*.
- K diskontování používá technickou úrokovou míru (TIR).
- TIR zákonně omezena (např. 2 % p.a. v daném období).
- Při výpočtu PV diskontujeme pomocí

$$v = \frac{1}{1 + TIR}.$$

- Vzhledem k velkému počtu klientů se riziko pojišťovny diverzifikuje.

Příklad: výpočet jednorázového pojistného

Příklad 11.3. Muž 50 let sjednává pojištění pro případ smrti s pojistnou částkou 1 000 000 Kč na dobu 5 let. TIR = 2 % p.a.

Řešení. Pravděpodobnost, že 50letý muž zemře ve n -tém roce, je

$$r_n = \frac{d_n}{l_{50}}.$$

PV očekávaných pojistných plnění:

$$\mathbb{E}PV = \sum_{k=0}^4 1\,000\,000 \cdot r_{50+k} \cdot v^{k+1} = 1\,000\,000 \sum_{k=0}^4 \frac{d_{50+k}}{l_{50}} \cdot \frac{1}{1.02^{k+1}}.$$

Tato hodnota bude sloužit jako netto pojistné.

- Výpočty v životním pojištění vyžadují
 - úmrtnostní tabulky (l_x, d_x, q_x),
 - diskontování (úroková míra i , faktor $v = \frac{1}{1+i}$).
- Při ručním počítání je neefektivní vše znovu sumovat.
- **Komutační čísla** předpočítávají typické součty:
 - zrychlují výpočty,
 - zjednodušují zápis vzorců,
 - umožňují tabulkovou kalkulaci pojistného a rezerv.

Komutační čísla nultého řádu:

$$D_x = l_x v^x, \quad C_x = d_x v^{x+1}.$$

(Platí $C_x = D_x v - D_{x+1}$)

Komutační čísla prvního řádu:

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots, \quad M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots$$

Komutační čísla druhého řádu:

$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots, \quad R_x = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots$$

(v MFP nepoužijeme)

- Plnění S při dožití n let:

$$\mathbb{E}PV = Sv^n \mathbb{P}[\text{dožije se } x + n] = Sv^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = S \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} = SA_{x:n]}^{\text{dožití}}, \quad A_{x:n]}^{\text{dožití}} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

- Plnění S v případě smrti:

$$\mathbb{E}PV = SA_x^{\text{smrt}}, \quad A_x^{\text{smrt}} := \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \frac{d_{x+k}}{l_x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^x C_{x+k}}{v^x D_x} = \frac{M_x}{D_x}$$

- Plnění S v případě smrti do n let : Plnění S .

$$\mathbb{E}PV = SA_{x:n]}^{\text{smrt}}, \quad A_{x:n]}^{\text{smrt}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}.$$

- **Plnění S při smrti v prvních n letech nebo při dožití $x + n$**

$$A_{x:\bar{n}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

součet dočasného pojištění pro případ smrti (část s $M_x - M_{x+n}$), a pojištění pro případ dožití (část s D_{x+n}).

- Trvalý předčasný (due) životní důchod:

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}.$$

- Dočasný důchod na n let:

$$\ddot{a}_{x:n|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}.$$

- Odložený důchod (výplata až od $x + n$):

$$\ddot{a}_{x+n}v^n = \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}v^n.$$

- Stejné schéma: „součet N “ v čitateli, „ D “ v jmenovateli.

Roční pojistné - smíšené pojištění

Princip ekvivalence (připomenutí): $\mathbb{E}PV$ plnění = $\mathbb{E}PV$ pojistného

Příklad: Smíšené pojištění (plnění S při smrti nebo dožití) s ročními platbami

- $\mathbb{E}PV$ plnění (připomenutí):

$$\frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} S$$

- $\mathbb{E}PV$ roční splátky p :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v^k p \frac{l_{x+k}}{l_x} = p \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = p \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

\Rightarrow

$$p = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} S.$$

Riziko pojištění - příklad

Uvažujme pojištění pro případ dožití s plněním S

- Náhodná veličina Z představuje současnou hodnotu plnění:

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{pokud se pojištěný dožije } x + n, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- Máme: $p := P[Z = 1] = \frac{D_{x+n}}{D_x}$, $\mathbb{E}Z = p$, $\text{var}(Z) = \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

⇒

$$\mathbb{E}PV = \mathbb{E}Sv^n Z = Sv^n \mathbb{E}Z = Sv^n \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$\text{var}(PV) = \text{var}(Sv^n Z) = S^2 v^{2n} \text{var}(Z) = S^2 v^{2n} \left[\frac{D_{x+n}}{D_x} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right) \right].$$

$$\sigma(PV) = v^n \sqrt{\frac{D_{x+n}}{D_x} \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} \right)} S.$$

5. DP

5. DP

1. Aktivum A má očekávaný výnos 5%, aktivum B má očekávaný výnos 10%. Obě mají směrodatnou odchylku výnosu 10%, výnosy jsou stochasticky nezávislé. Jaká bude směrodatná odchylka portfolia složeného z A a B s výnosem r ? Výsledek uveďte ve formě desetinného čísla (ne procenta) na 4 desetinná místa.
2. Jaké portfolio složené z aktiva B a bezriziového aktiva s výnosem 3% vybere investor dle kriteria mean-risk (směrodatná odchylka jako míra rizika) s rizikovou averzí λ . Krátké prodeje (půjčky aktiv) nejsou povoleny. Jako výsledek uveďte váhu aktiva B v portfoliu.

3. Pojištěncovi je $x = 55$ let. Z kohorty 100 000 lidí ve věku 55 v následujících pěti letech zemře každý rok a osob. Technická úroková míra je $TIR = 2\%$. Vypočítejte (i) jednorázové pojistné pro riziko smrti do deseti let (plnění se vyplácí v případě smrti) a (ii) jednorázové pojistné pro případ dožití deseti let (plnění se vyplácí, pokud se pojistník dožije 65 let), (iii) roční pojistné pro riziko smrti do tří let. Plnění je ve všech případech $S = 1\,000\,000$. Výsledky zaokrouhlete na celé koruny. Připomínka: pozor, plnění se diskutují jako kdyby nasatly na konci roku, zatímco u pojistného se předpokládá platba na začátku roku.

Zkouška etc.

- Nejproblematictější příklady na tabuli (MŠ)
- Konzultace a nejasnosti ohledně oprav úkolů (kolegyně)

5. příkladů, každý z okruhu jedné DP

Celkem 65 bodů

Varianty, možnost řešit ručně

Zádné materiály ani elektronika